

# Modulazioni

## Modulazione ASK (Amplitude Shift Keying)

### Introduzione

---

La modulazione ASK sfrutta il segnale portante nella sua componente analogica di bassa frequenza in fase. Il trasporto dell'informazione avviene modulando l'ampiezza della forma d'onda base. Ad ogni livello d'ampiezza che la forma d'onda può assumere corrisponde un opportuno simbolo. La più semplice modulazione ASK corrisponde alla modulazione OOK (On-Off Keying), in cui in caso di trasmissione del bit 1 viene inviata la forma d'onda, in caso di bit 0 non viene inviata nulla. Altri tipi di modulazione ASK possono prevedere più livelli, ad esempio 4 oppure 8, in cui a ciascun livello è assegnato non un singolo bit, ma piuttosto un simbolo che codifica un certo numero ( $\log_2 L$ , dove  $L$  è il numero di livelli usati) di bit.

### Schema a blocchi

---

### Trattazione

---

Nella modulazione ASK il segnale è costituito da un'onda PAM a simboli indipendenti

$$s(t) = \sum v[n] G_T h_T(t - nT_L)$$

Come detto, i simboli  $v[n]$  appartengono a un alfabeto composto da  $L$  caratteri corrispondenti a  $L$  livelli equispaziati nell'intervallo  $[-A, A]$  dove

$$v_j = \frac{2A}{L-1} j - A, \quad \text{con } j = 0, 1, \dots, L-1$$

Nel caso di assenza di interferenza intersimbolica, il ricevitore ottimo è costituito da un filtro seguito da un comparatore a soglia, come si vede nello schema a blocchi precedente. Inoltre spesso si lavora con la modulazione ASK in banda traslata, per permettere una migliore allocazione delle risorse, e consentire comunicazioni in parallelo, suddividendo la banda disponibile, oppure quando la banda di comunicazione disponibile non è contigua all'origine. Questo viene effettuato in trasmissione modulando (in parole povere, moltiplicando) il segnale ASK con una portante ad frequenza stabilita del tipo

$$\cos(2\pi f_p t)$$

In ricezione, per ritornare in banda base, il segnale viene rimoltiplicato per un coseno a stessa frequenza ma ad ampiezza doppia, e fatto passare per un filtro passabasso di banda  $[-W, W]$ , stessa banda del segnale di partenza.

### Dimensionamento dei livelli

---

Si consideri il caso di una sorgente binaria che emetta simboli con un ritmo costante pari a  $f_b$ . Se volessimo usare una modulazione ASK a due livelli, con un fattore di roll-off<sup>1</sup> pari a  $\gamma$ , la banda di cui si dovrebbe poter disporre sarebbe pari a  $f_b(1 + \gamma)$ . Qualora una banda di tale

---

<sup>1</sup> Vedi criterio di Nyquist sull'interferenza intersimbolica

ampiezza non fosse disponibile si può suddividere il flusso di simboli in blocchi di  $k$  simboli. Ciascun blocco viene poi trasformato in un simbolo di un nuovo alfabeto  $B$  ad  $L=2^k$  determinazioni. Ne segue che il flusso di simboli a valle della trasformazione presenterà un ritmo pari a

$$f_L = \frac{f_b}{k} = \frac{f_b}{\log_2 L}$$

Quindi la banda necessaria per trasmettere il segnale diventa

$$\frac{f_b}{\log_2 L} (1+\gamma)$$

Nel caso di banda assegnata  $[-B, B]$ , bisogna dimensionare bene il numero di livelli da utilizzare. Esso deve essere scelto in modo da soddisfare l'equazione

$$\log_2 L \geq \frac{f_b}{2B} (1+\gamma)$$

Dal momento che, a parità di altre condizioni, le prestazioni della modulazione ASK peggiorano con l'aumentare dei livelli, bisogna scegliere  $L$  pari al più piccolo intero che soddisfi la disequazione precedente.

## Prestazioni

Se per la codifica dei simboli per livello viene adottato il codice di Gray<sup>2</sup>, si può esprimere la probabilità d'errore sul singolo bit in funzione della probabilità d'errore sul simbolo. Dunque

$$P_b \approx \frac{P_e}{\log_2 L}$$

La probabilità di errore sul simbolo può essere espressa come

$$P_e^{ASK-PAM} = \left(1 - \frac{1}{L}\right) \operatorname{erfc}(y)$$

dove  $\operatorname{erfc}$  è la funzione di errore complementata e il termine  $y$  è espresso nel modo

$$y^2 = \operatorname{SNR}_0 \cdot \beta_{ASK}(L) \cdot \alpha^2$$

dove  $\operatorname{SNR}_0$  è il rapporto segnale-rumore di riferimento,  $\beta$  dipende dal numero di livelli e dalla forma di modulazione, e  $\alpha^2$  dipende dalla forma dei filtri usati. Per ciò che riguarda ASK, si ha

$$\beta_{ASK}(L) = \frac{3}{2} \frac{\log_2 L}{L^2 - 1}$$

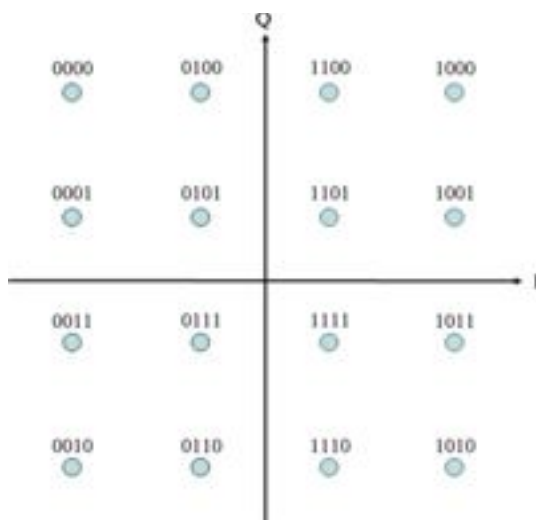
$$\text{con } \alpha^2 = \frac{R_T}{R_R} \frac{g_0^2(0)}{G_T^2 \int_{-\infty}^{\infty} |H_T(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2 df} \quad \text{e} \quad \operatorname{SNR}_0 = \frac{W d_T}{f_b \frac{N_0}{4R_R}}$$

$\operatorname{SNR}$  è così ipotizzato in assenza di rumore termico del ricevitore, e in caso di rumore bianco. Dunque ne segue che, fissato  $\alpha^2$ , in caso di aumento del rapporto segnale rumore, e quindi a seguito di un peggioramento dell'efficienza del canale di comunicazione, si può agire diminuendo  $\beta$ , ovvero diminuendo il numero di livelli utilizzati.

## Modulazione QAM (Quadrature Amplitude Modulation)

### Introduzione

Nel caso della modulazione ASK si utilizzava solamente, per veicolare il segnale, la componente analogica di bassa frequenza in fase. Nel caso però di segnali limitati in banda non contigua all'origine, l'informazione può essere veicolata tramite l'ampiezza e la fase istantanea dell'involuppo complesso. Pertanto mentre nella modulazione ASK in banda base i vettori-segnale associati a ciascun simbolo dovevano appartenere all'intervallo unidimensionale  $[-A, A]$ , nel caso di segnali limitati in banda non contigua all'origine i vettori-segnale possono essere disposti lungo il piano complesso. Nel caso della modulazione QAM i vettori-segnale associati agli  $L$  simboli sono disposti ai vertici di un reticolo. Per fare ciò si veicola l'informazione anche sulla componente analogica di bassa frequenza in quadratura del segnale. In base al numero di livelli utilizzati per modulare ciascuna componente analogica di bassa frequenza, si ottengono diverse modalità di QAM. Troviamo 16QAM in cui  $X_c$  e  $X_s$  sono modulati entrambi con 4 possibili livelli, 64 QAM, 256QAM e 128QAM, ottenuta per decimazione da una 256QAM cancellando i livelli più esterni, in modo tale da mantenere in qualche modo costante il modulo e quindi l'energia del segnale).



### Schema a blocchi

### Trattazione

Nella modulazione QAM il codificatore di trasmissione ed il separatore di flussi convertono la sequenza binaria prodotta dalla sorgente in due flussi di simboli  $v_c[n]$  e  $v_s[n]$  appartenenti ad un alfabeto composto da  $L_T$  caratteri corrispondenti a  $L_T$  livelli equispaziati nell'intervallo  $[-A, A]$

$$v_j = \frac{2A}{L_T - 1} j - A, \quad \text{con } j = 0, 1, \dots, L_T - 1$$

Se si indica in  $f_b$  il ritmo binario della sorgente, il ritmo delle due sequenze codificate sarà

$$f_{L_T} = \frac{f_b}{\log_2 L_T^2}$$

All'uscita dei due filtri di trasmissione sono quindi presenti le due onde PAM

$$s_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_c[n] G_T h_T(t - nT_L)$$

$$s_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_s[n] G_T h_T(t - nT_L)$$

che modulano rispettivamente la componente in fase e la componente in quadratura. Pertanto il segnale trasmesso sarà

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_c[n] G_T h_T(t - nT_L) \cos(2\pi f_p t + \theta) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_s[n] G_T h_T(t - nT_L) \sin(2\pi f_p t + \theta)$$

In ricezione il segnale dovrà essere demodulato e, con un apposito ricombinatore, ricostruito. Uno dei problemi ulteriori della soluzione QAM riguarda il recupero della sincronizzazione.

## Prestazioni

---

La probabilità di errore sul simbolo può essere espressa come

$$P_e^{QAM} = (1 - \frac{1}{L_T}) \operatorname{erfc}(y)$$

dove  $\operatorname{erfc}$  è la funzione di errore complementata e il termine  $y$  è espresso nel modo

$$y^2 = SNR_0 \cdot \beta_{QAM}(L) \cdot \alpha^2$$

dove  $SNR_0$  è il rapporto segnale-rumore di riferimento,  $\beta$  dipende dal numero di livelli e dalla forma di modulazione, e  $\alpha^2$  dipende dalla forma dei filtri usati. Per ciò che riguarda QAM, si ha

$$\beta_{QAM}(L) = \frac{3}{4} \frac{\log_2 L_T}{L_T - 1}$$

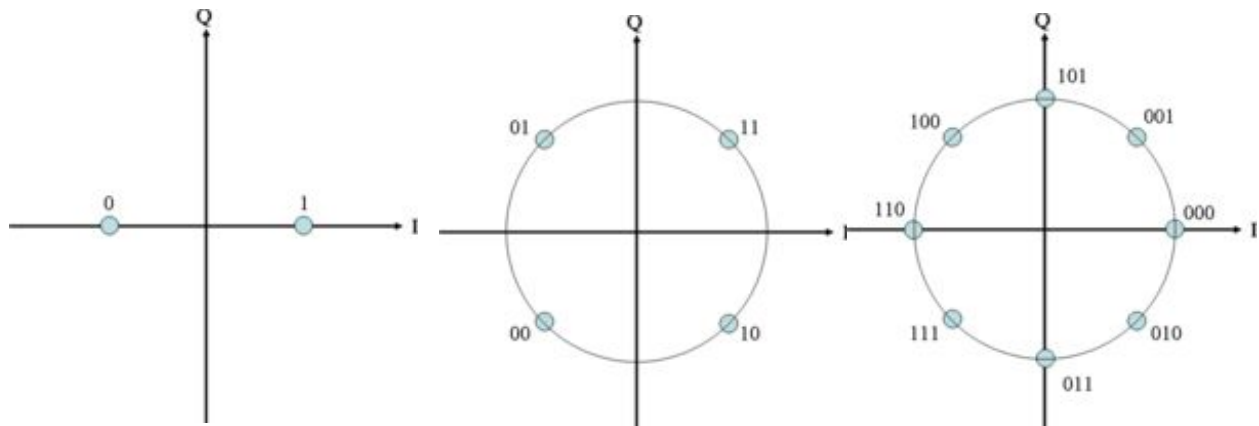
$$\text{con } \alpha^2 = \frac{R_T}{R_R} \frac{g_0^2(0)}{G_T^2 \int_{-\infty}^{\infty} |H_T(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2 df} \quad \text{e} \quad SNR_0 = \frac{W d_T}{f_b \frac{N_0}{4R_R}} \quad \text{identici a ASK.}$$

$SNR$  è così ipotizzato in assenza di rumore termico del ricevitore, e in caso di rumore bianco. Si nota dunque che in QAM l'aumento dei livelli influisce meno sulla probabilità d'errore rispetto a ASK. Questo perchè in QAM si riesce a tenere i simboli sulla costellazione del piano complesso più separati tra loro.

## Modulazione PSK

### Introduzione

Nella modulazione PSK l'informazione viene posta non più sull'ampiezza, bensì sulla fase. Tenendo costante il modulo del segnale, viene fatta variare la fase dello stesso, assegnandole ben determinati valori. Ogni valore è associato a un simbolo. Nel piano complesso risulta ovvio che i punti che corrispondono ad una modulazione PSK si trovano tutti lungo i bordi di una circonferenza. Come per la QAM, anche per la PSK possiamo trovare varie modalità, distinte dal numero di punti presenti, e quindi dal numero di valori possibili per la fase. Si va dalla BPSK (Binary PSK) alla QPSK (4 possibili valori) alla 8PSK (8 possibili valori).



### Schema a blocchi

### Trattazione

Nella modulazione PSK la fase istantanea è costituita da un'onda PAM ad impulsi rettangolari di durata pari all'intervallo di simbolo.

$$\alpha(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi[n] \text{rect}_{T_L}(t - nT_L)$$

I simboli  $[n]$  appartengono a un alfabeto composto da  $L_T$  caratteri corrispondenti, a meno di una fase arbitraria  $\Phi$ , a  $L_T$  livelli equispaziati nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$

$$\varphi_j = 2\frac{\pi}{L_T}j + \Phi, \quad \text{con } j=0, 1, \dots, L_T-1$$

Il segnale trasmesso è quindi del tipo

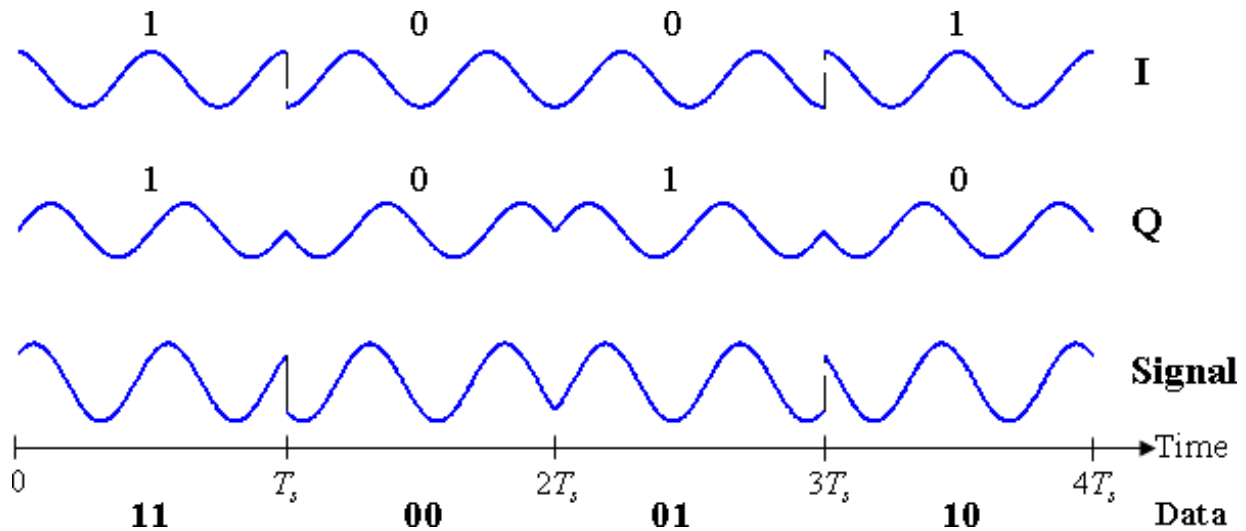
$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(\varphi[n]) A G_T h_T(t - nT_L) \cos(2\pi f_p t + \theta) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sin(\varphi[n]) A G_T h_T(t - nT_L) \sin(2\pi f_p t + \theta)$$

con

$$h_T(t) = \text{rect}_{T_L}(t)$$

Notare che anche la PSK lavora con le componenti di bassa frequenza in fase e in quadratura. In fase di ricezione, viene demodulato il segnale e calcolata la fase. Il valore ottenuto viene

comparato da un decisore a soglia rispetto ai possibili valori che la fase può assumere.



## Prestazioni

La probabilità di errore sul simbolo può essere espressa come

$$P_e^{PSK} = \begin{cases} \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(y) & L=2 \\ \operatorname{erfc}(y) & L>2 \end{cases}$$

dove  $\operatorname{erfc}$  è la funzione di errore complementata e il termine  $y$  è espresso nel modo

$$y^2 = \operatorname{SNR}_0 \cdot \beta_{PSK}(L) \cdot \alpha^2$$

dove  $\operatorname{SNR}_0$  è il rapporto segnale-rumore di riferimento,  $\beta$  dipende dal numero di livelli e dalla forma di modulazione, e  $\alpha^2$  dipende dalla forma dei filtri usati. Per ciò che riguarda PSK, si ha

$$\beta_{PSK}(L) = \frac{1}{2} \sin^2\left(\frac{\pi}{L}\right) \log_2 L$$

con  $\alpha^2 = \frac{R_T}{R_R} \frac{g_0^2(0)}{G_T^2 \int_{-\infty}^{\infty} |H_T(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2 df}$  e  $\operatorname{SNR}_0 = \frac{W d_T}{f_b \frac{N_0}{4R_R}}$  identici a ASK.

$\operatorname{SNR}$  è così ipotizzato in assenza di rumore termico del ricevitore, e in caso di rumore bianco.

## Modulazioni OQPSK – MSK – GMSK

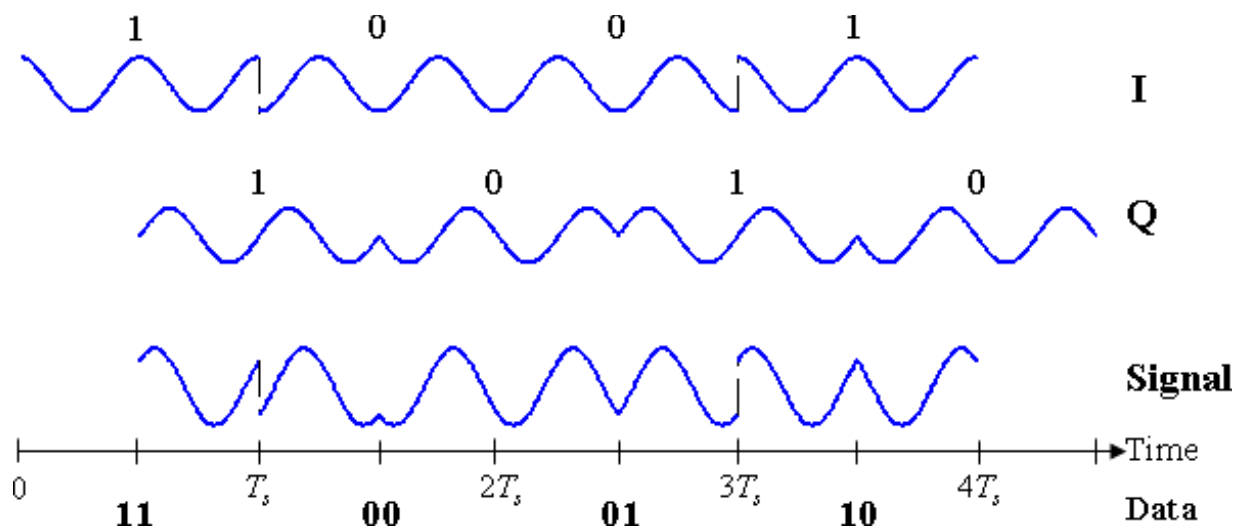
### Trattazione

Nella modulazione QPSK (o 4PSK) la fase della portante cambia ogni  $T_L$  secondi. Poichè di solito il segnale QPSK è successivamente limitato in banda tramite un passabanda per prevenire le interferenze dei canali adiacenti, le variazioni di fase di  $180^\circ$  che possono presentarsi in una data realizzazione inducono una temporanea diminuzione dell'involuppo, che quindi non si mantiene costante, come desiderato.

Nella modulazione OQPSK (Offset QPSK) il canale in quadratura è ritardato di un'intervallo pari a  $T_L/2$  rispetto al canale in fase. La forma d'onda trasmessa è pari a

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(\varphi[n]) A G_T h_T(t - nT_L) \cos(2\pi f_p t + \theta) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sin(\varphi[n]) A G_T h_T(t - nT_L - \frac{T_L}{2}) \sin(2\pi f_p t + \theta)$$

Questo elimina la possibilità di salti di  $180^\circ$  sulla costellazione del piano complesso (dato che, per ogni istante ogni  $T_L$ , il canale in quadratura risulta "bloccato" sulla sua fase, e l'unico che può variare è il canale in fase)



Per evitare salti della fase, ed eliminarne quindi la non linearità, è possibile far variare la fase con velocità angolare costante piuttosto che "a salti". Per fare questo, invece di utilizzare impulsi rettangolari, si utilizzano impulsi sinusoidali. Questa forma di modulazione prende il nome di MSK (Minimum Shift Keying). La nostra funzione  $h_T(t)$  è quindi

$$h_T(t) = \cos\left[\frac{\pi}{T_L}\left(t - \frac{T_L}{2}\right)\right] \text{rect}_{T_L}\left(t - \frac{T_L}{2}\right)$$

Il nome di questa forma di modulazione è giustificato dal fatto che la modulazione MSK può essere vista anche come una modulazione di frequenza, in cui, in un intervallo di durata pari a  $T_L/2$  la frequenza istantanea assume uno dei due valori

$$f_1 = f_p - \frac{1}{2T_L}$$

$$f_2 = f_p + \frac{1}{2T_L}$$

E' possibile dimostrare che la separazione tra le due frequenze è la minima che garantisce l'ortogonalità tra impulsi rettangolari modulati di durata  $T_L/2$ . Se invece di un impulso sinusoidale utilizziamo un impulso gaussiano, otteniamo la modulazione GMSK.