



*Università degli studi di Roma Tre*

*Facoltà di Ingegneria*

---

*Appunti dalle lezioni del corso di  
Trasmissioni numeriche*

TEORIA DELLA STIMA E DELLA DECISIONE

Prof. Alessandro NERI

Roma, Ottobre 2004

# INDICE

<b>TEORIA DELLA RICEZIONE.....</b>	<b>4</b>
<b>1. INTRODUZIONE.....</b>	<b>4</b>
<b>2. MODELLAZIONE DEI PROBLEMI DI RICEZIONE OTTIMA .....</b>	<b>5</b>
Rischio assoluto .....	6
2.1. PROCEDURA DI BAYES.....	6
2.2. PROCEDURA MINIMAX .....	7
<b>3. VERIFICA DI IPOTESI BINARIA .....</b>	<b>8</b>
Criterio di Bayes .....	9
Rapporto di verosimiglianza .....	10
criterio della minima probabilità d'errore .....	10
<b>4. RIVELAZIONE DI SEGNALI IN RUMORE GAUSSIANO .....</b>	<b>11</b>
Ricevitore a correlazione.....	14
Ricevitore a filtro adattato.....	19
<b>5. VERIFICA DI IPOTESI L-ARIA.....</b>	<b>21</b>
Funzionale di verosimiglianza generalizzata.....	23
<b>4. RIVELAZIONE L-ARIA IN RUMORE GAUSSIANO .....</b>	<b>23</b>
Ricevitore a correlazione.....	25
<b>STIMA DI PARAMETRO .....</b>	<b>27</b>
<b>APPROCCIO DI BAYES .....</b>	<b>27</b>
STIMA A MINIMO ERRORE QUADRATICO MEDIO (MMSE).....	28
STIMA A MINIMO ERRORE ASSOLUTO MEDIO (MMAE).....	30
STIMA A MASSIMA PROBABILITÀ A POSTERIORI (MPA).....	30
STIMA A MASSIMA VEROSIMIGLIANZA (ML).....	31
<b>MODULAZIONI NUMERICHE.....</b>	<b>33</b>

<b>INTERFERENZA INTERSIMBOLICA .....</b>	<b>33</b>
<b>MODULAZIONE ASK.....</b>	<b>44</b>
CASI PARTICOLARI - RICEVITORE OTTIMO .....	52
RICEVITORE SUBOTTIMO .....	54
<b>MODULAZIONE QAM .....</b>	<b>56</b>
<b>MODULAZIONE PSK .....</b>	<b>61</b>
MODULAZIONE OQPSK .....	64
MODULAZIONE MSK.....	64
 <b><u>MULTIPLAZIONE CDMA .....</u></b>	 <b><u>67</u></b>
 <b>DS-CDMA.....</b>	 <b>70</b>
CASO SINCRONO .....	72
CASO ASINCRONO.....	73
 <b><u>CARATTERIZZAZIONE DEL RUMORE NEI CIRCUITI.....</u></b>	 <b><u>79</u></b>
 1. RUMORE TERMICO.....	 79
2. RUMORE TERMICO NELLE RETI 2 PORTE.....	82
Reti passive .....	84
Reti Attive .....	85
Fattore di rumore.....	86
Cascata di reti 2-porte .....	87
 <b><u>CANALI AFFETTI DA FADING .....</u></b>	 <b><u>90</u></b>
 1. MODELLO WIDE SENSE STATIONARY UNCORRELATED SCATTERING (WWSSU).....	  90
EFFETTI.....	94

## *Teoria della ricezione*

### 1. INTRODUZIONE

In generale, la trasmissione di un messaggio da una sorgente ad un destinatario attraverso un canale di comunicazione comporta un insieme di alterazioni dei segnali impiegati per tale scopo, dovute in parte alle caratteristiche del mezzo trasmissivo ed in parte alle apparecchiature di trasmissione e di ricezione. Di conseguenza è necessario effettuare un'elaborazione del segnale disponibile a valle del canale di trasmissione al fine di recuperare il messaggio emesso dalla sorgente.

Poiché di norma tali alterazioni non sono note a priori se non in senso statistico, nella progettazione e nel dimensionamento degli apparati e dei dispositivi che assolvono la funzione di estrazione del messaggio trasmesso, il cui complesso sarà indicato nel seguito con il termine di *ricevitore*, occorre fare ricorso alle metodologie ed alle tecniche proprie della *Teoria statistica della Decisione* e della *Teoria della Stima*.

Scopo della presente nota è quello di fornire alcuni fondamenti essenziali di tali teorie, avendo come riferimento i problemi che possono essere utilmente affrontati con tali strumenti nel settore applicativo delle telecomunicazioni.

## 2. MODELLAZIONE DEI PROBLEMI DI RICEZIONE OTTIMA

Si consideri, a titolo esemplificativo, un sistema di comunicazione in cui una sorgente generi un messaggio  $\mathbf{x}$  che perviene al destinatario sotto forma di un segnale  $z(t)$  attraverso un mezzo fisico opportuno. Nel seguito si assumerà che  $\mathbf{x}$  sia la determinazione di una variabile aleatoria (v.a.)  $N$ -dimensionale  $\mathbf{X}$ , e che le trasformazioni subite dal segnale emesso dalla sorgente da parte delle apparecchiature di adattamento all'ingresso e all'uscita del canale di trasmissione, nonché da parte del canale stesso, non siano completamente note a priori, ma che per esse esista un modello statistico che descriva il meccanismo di transizione probabilistica dallo spazio di messaggio  $\mathbf{X}$  allo spazio del processo aleatorio  $Z(t)$  osservabile dal destinatario. Più specificatamente, assumendo che i segnali in gioco presentino una qualche forma di limitazione (e.g. in banda, o in durata), si farà riferimento nel seguito ad una rappresentazione  $\mathbf{z}$  del segnale ricevuto costituita da un numero finito o al più infinito numerabile di componenti.

La ricostruzione del messaggio  $\mathbf{x}$  a partire dal segnale osservato  $\mathbf{z}$  può essere formulata come l'individuazione di una funzione

$$\hat{\mathbf{X}}: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{X} \quad (1.1)$$

che faccia corrispondere al vettore osservato  $\mathbf{z}$  un ben preciso valore

$$\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z})$$

scelto sulla base di un qualche criterio di ottimalità. Si parla di *decisione* se  $\mathbf{X}$  è una variabile aleatoria discreta, mentre si parla di *stima* se  $\mathbf{X}$  è una variabile aleatoria continua.

L'individuazione della funzione  $\hat{\mathbf{X}}$  secondo un approccio razionale richiede, come già osservato, l'introduzione di un *criterio di ottimalità* che fornisca un indice della bontà della stima effettuata o della decisione presa, e di una

*procedura di decisione* che occorre seguire. A tal fine si suppone pertanto assegnata una funzione  $C[\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z})]$  detta *funzione di costo*, che traduce in termini quantitativi le conseguenze di una stima o di una decisione errata.

Per una funzione di costo assegnata, è possibile associare ad ogni funzione  $\hat{\mathbf{X}}$  un *rischio condizionato (a priori)*

$$r[\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}(\cdot)] = E_{\mathbf{Z}/\mathbf{X}} \{C[\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z})] / \mathbf{x}\} \quad (1.2)$$

che rappresenta, per ciascuna determinazione  $\mathbf{x}$  della variabile aleatoria  $\mathbf{X}$ , il valore atteso condizionato a  $\mathbf{X}$  del costo associato alla scelta effettuata sulla base della regola di stima o di decisione selezionata.

---

**RISCHIO ASSOLUTO**

---

Sulla base del rischio condizionato che porta in conto l'aleatorietà dell'esperimento di osservazione, è possibile introdurre un criterio che tiene conto delle possibili determinazioni di  $\mathbf{X}$ , mediando il rischio condizionato tramite una funzione  $\alpha(\mathbf{x})$  che consente di includere nella valutazione sia le caratteristiche statistiche di  $\mathbf{X}$ , sia eventuali preferenze del soggetto decisore. Si definisce pertanto come *rischio assoluto* o più semplicemente *rischio* la funzione

$$R_\alpha [\hat{\mathbf{x}}(\cdot)] = \int_{\mathbf{X}} r[\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}(\cdot)] \alpha(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (3)$$

che costituisce un indice globale della bontà della regola di stima o di decisione.

## **2.1. Procedura di Bayes**

La procedura di Bayes adotta come funzione peso per il calcolo del rischio assoluto la funzione di densità di probabilità (f.d.p.) della variabile aleatoria  $\mathbf{X}$ .

Tale rischio, indicato generalmente con il termine di rischio di Bayes, é pertanto pari a

$$R_B [\hat{\mathbf{x}}(\cdot)] = E_{\mathbf{X}} \{r[\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}(\cdot)]\}. \quad (4)$$

La regola di decisione (ovvero lo stimatore)  $\hat{\mathbf{x}}_B(\mathbf{z})$ , tale che

$$R_B [\hat{\mathbf{x}}_B(\cdot)] = \text{Min}\{R_B [\hat{\mathbf{x}}(\cdot)]\} \quad (5)$$

é chiamata *soluzione di Bayes* (ovvero *stimatore di Bayes*).

## 2.2. Procedura Minimax

Come analizzato nel paragrafo precedente, l'applicazione della procedura di Bayes conduce alla minimizzazione del costo medio. Ora, tale criterio di progetto non é sempre accettabile. Esistono, infatti, situazioni in cui si é interessati a garantirsi piuttosto dal rischio condizionato massimo. Tale criterio, noto in letteratura come *criterio minimax*, porta quindi a selezionare la funzione

$$\hat{\mathbf{x}}_M(\mathbf{z})$$

detta *soluzione minimax*, per cui risulta

$$\sup_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} r[\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}_M(\cdot)] \leq \sup_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} r[\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}(\cdot)]. \quad (6)$$

Come é facile verificare, la soluzione minimax coincide con la soluzione di Bayes relativa alla distribuzione del messaggio meno favorevole.

Si osservi che uno dei vantaggi della soluzione minimax é rappresentato dal fatto che mentre la procedura di Bayes richiede la conoscenza completa delle proprietà statistiche del messaggio emesso dalla sorgente, tale informazione, non sempre disponibile, non é invece necessaria per l'individuazione della soluzione minimax.

### 3. VERIFICA DI IPOTESI BINARIA

Si consideri ora il problema di decisione, noto come *verifica di ipotesi binaria*, in cui la v.a. di interesse  $\mathbf{X}$  è una v.a. discreta con due possibili determinazioni che verranno indicate nel seguito rispettivamente come ipotesi  $H_0$  e  $H_1$ . Indicata con  $\mathbf{z}$  la generica determinazione della v.a.  $\mathbf{Z}$   $N$ -dimensionale osservabile, il meccanismo di transizione probabilistica che descrive l'operazione di misura è descritto dalle f.d.p. condizionate

$$p_{\mathbf{Z}/H_0}(\mathbf{z}/H_0)$$

e

$$p_{\mathbf{Z}/H_1}(\mathbf{z}/H_1).$$

La regola di decisione corrisponde in questo caso ad una partizione dello spazio  $\mathbf{Z}$   $N$ -dimensionale in due insiemi  $\Gamma_0$  e  $\Gamma_1$  tali che ad ogni osservazione  $\mathbf{z} \in \Gamma_0$  venga fatta corrispondere l'ipotesi  $H_0$  e ad ogni osservazione  $\mathbf{z} \in \Gamma_1$  venga fatta corrispondere l'ipotesi  $H_1$ . In accordo con l'impostazione generale, la predetta partizione deve essere selezionata in modo tale da minimizzare il rischio assoluto. Si osservi che in questo caso per la funzione di costo può essere impiegata la seguente forma matriciale

	$H_0$	$H_1$
$\hat{H}_0$	$C_{00}$	$C_{01}$
$\hat{H}_1$	$C_{10}$	$C_{11}$

avendo posto

$$C_{ij} = C[H_j, \hat{H}_i(\mathbf{z})]. \quad (7)$$

Di conseguenza, indicando con  $\Pr\{\hat{H}_i/H_j\}$  la probabilità di decidere per l'ipotesi  $H_i$  quando risulta vera l'ipotesi  $H_j$ , con  $P_0$  e  $P_1$ , le probabilità a priori relative rispettivamente all'ipotesi  $H_0$  e all'ipotesi  $H_1$  ed osservando che

$$\Pr\{\hat{H}_0/H_j\} = 1 - \Pr\{\hat{H}_1/H_j\} \quad (8)$$



il rischio assoluto assume la seguente espressione:

$$R[\hat{H}(\cdot)] = \sum_{j=0}^1 \sum_{i=0}^1 C_{ij} \Pr\{\hat{H}_i / H_j\} P_j \quad (9)$$

$$= (C_{00} - C_{10}) \Pr\{\hat{H}_0 / H_0\} P_{01} + (C_{01} - C_{11}) \Pr\{\hat{H}_0 / H_1\} P_1 + C_{10} P_0 + C_{11} P_1 \quad (10)$$

---

**CRITERIO DI BAYES**

---

Osservando inoltre che

$$\Pr\{\hat{H}_i / H_j\} = \int_{\Gamma_i} p_{\mathbf{Z}/H_j}(\mathbf{z}/H_j) d\mathbf{z}, \quad (11)$$

il rischio di Bayes può essere scritto come segue:

$$R_B[\hat{H}_j(\bullet)] = C_{10} P_0 + C_{11} P_1 + \int_{\Gamma_0} [(C_{01} - C_{11}) P_1 p_{\mathbf{Z}/H_1}(\mathbf{z}/H_1) - (C_{10} - C_{00}) P_0 p_{\mathbf{Z}/H_0}(\mathbf{z}/H_0)] d\mathbf{z}. \quad (12)$$

Quindi, assumendo che il costo di una decisione errata sia superiore a quello di una decisione corretta, cosicché  $C_{11} < C_{01}$ , il rischio assoluto risulta minimo se la partizione viene scelta in modo tale che tutti i punti che rendono negativo l'integrando appartengano a  $\Gamma_0$  e, viceversa, tutti i punti che lo rendono positivo l'integrando appartengano a  $\Gamma_1$ , ovvero

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \left\{ \mathbf{z} \in \mathbf{Z} \mid [(C_{01} - C_{11}) P_1 p_{\mathbf{Z}/H_1}(\mathbf{z}/H_1) - (C_{10} - C_{00}) P_0 p_{\mathbf{Z}/H_0}(\mathbf{z}/H_0)] \geq 0 \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{z} \in \mathbf{Z} \mid (C_{01} - C_{11}) P_1 p_{\mathbf{Z}/H_1}(\mathbf{z}/H_1) \geq (C_{10} - C_{00}) P_0 p_{\mathbf{Z}/H_0}(\mathbf{z}/H_0) \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

In modo del tutto equivalente la regola di decisione può essere riscritta nella forma seguente:

$$\frac{p_{\mathbf{Z}/H_1}(\mathbf{z}/H_1)}{p_{\mathbf{Z}/H_0}(\mathbf{z}/H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \frac{(C_{10} - C_{00})P_0}{(C_{01} - C_{11})P_1}. \quad (14)$$

---

**RAPPORTO DI  
VEROSIMIGLIANZA**

---

Si osservi che indicando con  $\Lambda(\mathbf{Z})$  il seguente rapporto

$$\Lambda(\mathbf{Z}) = \frac{p_{\mathbf{Z}/H_1}(\mathbf{z}/H_1)}{p_{\mathbf{Z}/H_0}(\mathbf{z}/H_0)} \quad (15)$$

noto nella letteratura corrente come *rapporto di verosimiglianza*, e ponendo

$$\eta = \frac{(C_{10} - C_{00})P_0}{(C_{01} - C_{11})P_1}, \quad (16)$$

la precedente regola di decisione può essere riscritta nella forma seguente:

$$\Lambda(\mathbf{Z}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \eta. \quad (17)$$

Tale regola è nota come *verifica del rapporto di verosimiglianza*. Si osservi che poiché il logaritmo naturale è una funzione monotona crescente del suo argomento, ed entrambi i termini che compaiono nel test di verifica del rapporto di verosimiglianza sono positivi, il test può essere riscritto nella forma equivalente:

$$\ln \Lambda(\mathbf{Z}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \ln \eta. \quad (18)$$

---

**CRITERIO DELLA  
MINIMA  
PROBABILITÀ  
D'ERRORE**

---

Si consideri ora in particolare il caso di costo uniforme dato da:

$$C_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ 1 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (19)$$

In questo caso il rischio assoluto si riduce a

$$\begin{aligned} R[\hat{H}(\cdot)] &= \Pr\{\hat{H}_1 / H_0\}P_0 + \Pr\{\hat{H}_0 / H_1\}P_1 = \\ &= P_E \end{aligned} \quad (20)$$

che coincide quindi con la probabilità d'errore  $P_E$ . Poiché in tal caso la soglia  $\eta$  si riduce al rapporto  $P_0/P_1$  tra le probabilità a priori, la regola di decisione corrispondente alla minima probabilità d'errore é

$$p_{\mathbf{Z}/H_1}(\mathbf{z}/H_1)P_1 \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} p_{\mathbf{Z}/H_0}(\mathbf{z}/H_0)P_0. \quad (21)$$

Dividendo entrambi i membri per la f.d.p. di  $\mathbf{Z}$ , la regola precedente può essere riscritta come segue:

$$\frac{p_{\mathbf{Z}/H_1}(\mathbf{z}/H_1)P_1}{p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})} \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \frac{p_{\mathbf{Z}/H_0}(\mathbf{z}/H_0)P_0}{p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})}, \quad (22)$$

ovvero

$$P_{H_1/\mathbf{Z}}(H_1/\mathbf{z}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} P_{H_0/\mathbf{Z}}(H_0/\mathbf{z}). \quad (23)$$

In essenza il criterio della minima probabilità d'errore porta quindi a selezionare l'ipotesi per la quale risulta massima la probabilità condizionata a posteriori (ovvero condizionata rispetto all'osservazione  $\mathbf{z}$ ).

#### **4. RIVELAZIONE DI SEGNALI IN RUMORE GAUSSIANO**

Con riferimento ai sistemi di telecomunicazione, consideriamo ora il caso in cui la sorgente emetta un simbolo binario e che conseguentemente venga trasmessa la forma d'onda  $s_0(t)$  se il simbolo generato è pari a 0, o la forma d'onda  $s_1(t)$  se il simbolo generato è pari a 1.

Assumiamo inoltre che entrambe le forme d'onda siano limitate in banda  $[-W, W]$ , cosicché si possa fare riferimento alla rappresentazione costituita dai campioni

$$\left\{ s_0\left(\frac{k}{2W}\right) \right\}, \quad \left\{ s_1\left(\frac{k}{2W}\right) \right\} \quad (24)$$

Si supponga inoltre che il segnale ricevuto sia affetto da un rumore additivo modellabile come una realizzazione  $n(t)$  di un processo gaussiano, stazionario, ergodico, a valor medio nullo e spettro di densità di potenza uniforme pari a  $\mathcal{N}_0$  nella banda  $[-W, W]$ .

L'obiettivo è quello di decidere se è stato trasmesso il simbolo 0 o il simbolo 1, a partire dall'osservazione di un numero finito, diciamo  $M$ , di campioni del segnale ricevuto  $z(t)$ .

Il problema può essere formulato in termini di verifica di ipotesi binaria, tramite il seguente modello

$$\begin{cases} H_0 : z_k = n_k + s_{0_k}, & k = 1, 2, \dots, M \\ H_1 : z_k = n_k + s_{1_k}, & k = 1, 2, \dots, M \end{cases} \quad (25)$$

in cui

$$s_{0_k} = \left\{ s_0 \left( \frac{k}{2W} \right) \right\}, \quad s_{1_k} = \left\{ s_1 \left( \frac{k}{2W} \right) \right\}, \quad n_k = \left\{ n \left( \frac{k}{2W} \right) \right\}, \quad z_k = \left\{ z \left( \frac{k}{2W} \right) \right\}. \quad (26)$$

Indicando rispettivamente con  $\mathbf{z}$ ,  $\mathbf{s}_0$ ,  $\mathbf{s}_1$ , e  $\mathbf{n}$  i vettori a  $M$  componenti

$$\mathbf{s}_0 = \begin{bmatrix} s_{0_1} \\ s_{0_2} \\ \vdots \\ s_{0_k} \\ \vdots \\ s_{0_M} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} s_{1_1} \\ s_{1_2} \\ \vdots \\ s_{1_k} \\ \vdots \\ s_{1_M} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_k \\ \vdots \\ n_M \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_k \\ \vdots \\ z_M \end{bmatrix}$$

il problema può essere riscritto in modo compatto come segue

$$\begin{cases} H_0 : \mathbf{z} = \mathbf{n} + \mathbf{s}_0 \\ H_1 : \mathbf{z} = \mathbf{n} + \mathbf{s}_1 \end{cases} \quad (28)$$

Dalle (28) discende che la densità di probabilità della variabile aleatoria  $\mathbf{Z}$  condizionata all'ipotesi  $H_0$  vale

$$p_{\mathbf{Z}/H_0}(\mathbf{z}/H_0) = p_{\mathbf{N}}(\mathbf{z} - \mathbf{s}_0). \quad (29)$$

Analogamente, per la densità di probabilità della variabile aleatoria  $\mathbf{Z}$  condizionata all'ipotesi  $H_1$  si ha

$$p_{\mathbf{Z}/H_1}(\mathbf{z}/H_1) = p_{\mathbf{N}}(\mathbf{z} - \mathbf{s}_1). \quad (30)$$

Poiché  $\mathbf{N}$  è una variabile aleatoria gaussiana  $M$ -dimensionale, a valor atteso nullo, la sua funzione di densità di probabilità vale

$$p_{\mathbf{N}}(\mathbf{n}) = \frac{1}{(2\pi)^{M/2} \sqrt{\det[\mathbf{K}_{\mathbf{N}}]}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{n}^T \mathbf{K}_{\mathbf{N}}^{-1} \mathbf{n}}. \quad (31)$$

Inoltre avendo assunto che lo spettro di densità di potenza è uniforme nella banda  $[-W, W]$ , i campioni di rumore sono tra loro in correlati e la matrice di covarianza diviene proporzionale alla matrice identità:

$$\mathbf{K}_{\mathbf{N}} = \sigma_N^2 \mathbf{I}, \quad (32)$$

avendo posto

$$\sigma_N^2 = 2W\mathcal{N}_0. \quad (33)$$

Pertanto la funzione di densità di probabilità si riduce a

$$p_{\mathbf{N}}(\mathbf{n}) = \frac{1}{(2\pi\sigma_N^2)^{M/2}} e^{-\frac{\mathbf{n}^T \mathbf{n}}{2\sigma_N^2}}. \quad (34)$$

Sostituendo la (34) nelle (29) e (30) si ha

$$p_{\mathbf{Z}/H_0}(\mathbf{z}/H_0) = \frac{1}{(2\pi\sigma_N^2)^{M/2}} e^{-\frac{[\mathbf{z}-\mathbf{s}_0]^T [\mathbf{z}-\mathbf{s}_0]}{2\sigma_N^2}} \quad (35)$$

$$p_{\mathbf{Z}/H_1}(\mathbf{z}/H_1) = \frac{1}{(2\pi\sigma_N^2)^{M/2}} e^{-\frac{[\mathbf{z}-\mathbf{s}_1]^T [\mathbf{z}-\mathbf{s}_1]}{2\sigma_N^2}}, \quad (36)$$

cosicché il logaritmo del rapporto di verosimiglianza può essere riscritto come segue:

$$\begin{aligned}
 \ln \Lambda(\mathbf{Z}) &= \ln \frac{p_{\mathbf{Z}/H_1}(\mathbf{z}/H_1)}{p_{\mathbf{Z}/H_0}(\mathbf{z}/H_0)} = \\
 &= -\frac{[\mathbf{z} - \mathbf{s}_1]^T [\mathbf{z} - \mathbf{s}_1]}{2\sigma_N^2} + \frac{[\mathbf{z} - \mathbf{s}_0]^T [\mathbf{z} - \mathbf{s}_0]}{2\sigma_N^2} = \\
 &= -\frac{\mathbf{z}^T \mathbf{z} - \mathbf{z}^T \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_1^T \mathbf{z} + \mathbf{s}_1^T \mathbf{s}_1 - \mathbf{z}^T \mathbf{z} + \mathbf{z}^T \mathbf{s}_0 + \mathbf{s}_0^T \mathbf{z} - \mathbf{s}_0^T \mathbf{s}_0}{2\sigma_N^2} = \\
 &= \frac{2\mathbf{z}^T \mathbf{s}_1 - 2\mathbf{z}^T \mathbf{s}_0 + \mathbf{s}_1^T \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_0^T \mathbf{s}_0}{2\sigma_N^2}
 \end{aligned} \tag{37}$$

---

**RICEVITORE A  
CORRELAZIONE**

---

Dalla (37) discende che la regola di decisione relativa alla rivelazione di segnali binari in presenza di rumore gaussiano è

$$\begin{matrix} H_1 \\ \mathbf{z}^T \mathbf{s}_1 - \mathbf{z}^T \mathbf{s}_0 > \sigma_N^2 \ln \eta + \frac{1}{2} (\mathbf{s}_1^T \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_0^T \mathbf{s}_0) \\ H_0 \end{matrix} \tag{38}$$

La struttura del ricevitore, detto *ricevitore a correlazione*, è illustrata in Fig.1.

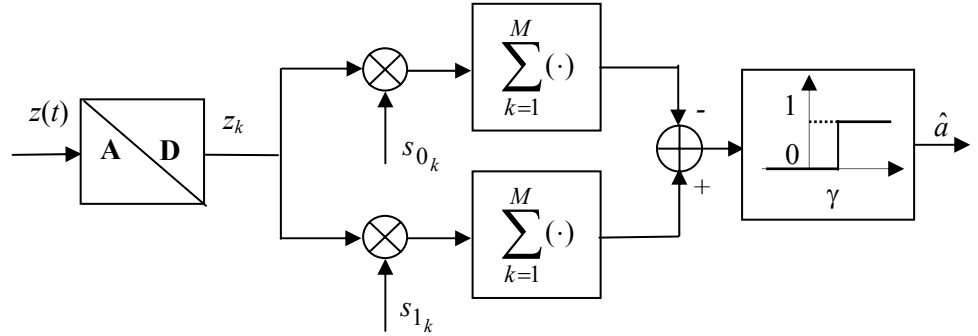


Fig.1 - Ricevitore a correlazione

Se, come in genere accade, le due forme d'onda risultano pari a

$$s_0(t) = -g(t) \tag{39}$$

$$s_1(t) = g(t) \tag{40}$$

il calcolo del rapporto di verosimiglianza richiede un unico correlatore, in quanto la relazione (38) si riduce a

$$\mathbf{z}^T \mathbf{g} \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \frac{1}{2} \sigma_N^2 \ln \eta. \quad (41)$$

Inoltre nel caso usuale di costo uniforme, (19), e simboli d'ingresso equiprobabili la soglia è nulla e la regola di decisione si semplifica ulteriormente come segue

$$\mathbf{z}^T \mathbf{g} \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} 0. \quad (42)$$

Per la valutazione delle prestazioni del ricevitore ottimo (42) si osservi che dalla (28) discende che, condizionatamente all'ipotesi  $H_0$ , la variabile aleatoria  $\mathbf{z}^T \mathbf{g}$  è una variabile aleatoria gaussiana con valor atteso

$$E_{\mathbf{z}/H_0} \{ \mathbf{z}^T \mathbf{g} / H_0 \} = E_{\mathbf{N}/H_0} \{ (\mathbf{n} - \mathbf{g})^T \mathbf{g} / H_0 \} = -2W\mathcal{E}_g \quad (43)$$

e varianza

$$\sigma_{\mathbf{z}/H_0}^2 = \mathbf{g}^T \mathbf{g} \quad \sigma_N^2 = 2W\mathcal{E}_g \sigma_N^2 = 4W^2 \mathcal{E}_g \mathcal{N}_0 \quad (44)$$

Mentre, condizionatamente all'ipotesi  $H_1$ , la variabile aleatoria  $\mathbf{z}^T \mathbf{g}$  è una variabile aleatoria gaussiana con valor atteso

$$E_{\mathbf{z}/H_1} \{ \mathbf{z}^T \mathbf{g} / H_1 \} = E_{\mathbf{N}/H_0} \{ (\mathbf{n} + \mathbf{g})^T \mathbf{g} / H_0 \} = +2W\mathcal{E}_g \quad (45)$$

e varianza

$$\sigma_{\mathbf{z}/H_1}^2 = \mathbf{g}^T \mathbf{g} \quad \sigma_N^2 = 2W\mathcal{E}_g \sigma_N^2 = 4W^2 \mathcal{E}_g \mathcal{N}_0 \quad (46)$$

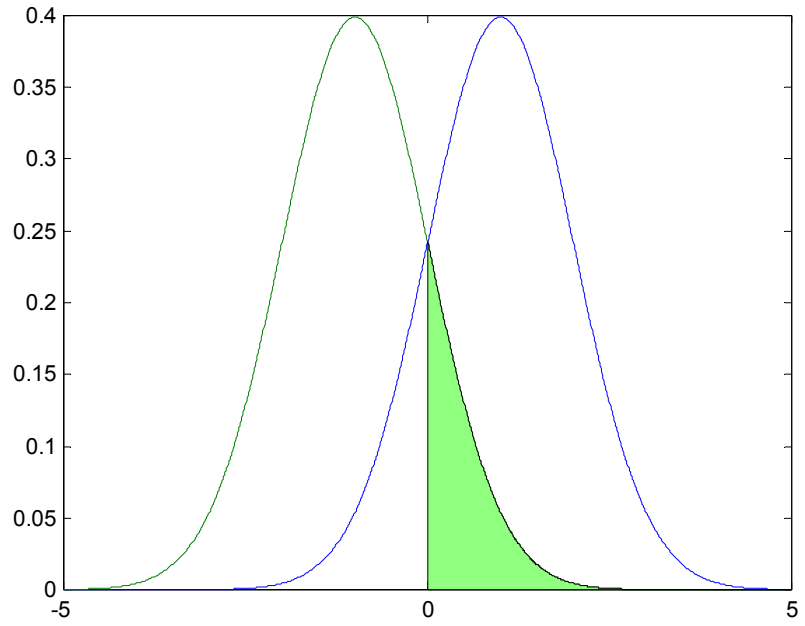


Fig.2. Probabilità d'errore condizionata all'ipotesi  $H_0$

Pertanto la probabilità  $P_{e/H_0}$  di commettere un errore quando viene trasmesso il simbolo 0 vale

$$\begin{aligned}
 P_{e/H_0} &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi 4W^2 E_g N_0}} e^{-\frac{(\zeta + 2W E_g)^2}{8W^2 E_g N_0}} d\zeta \\
 &= \int_{2W E_g}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi 4W^2 E_g N_0}} e^{-\frac{\zeta^2}{8W^2 E_g N_0}} d\zeta \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{\frac{E_g}{2N_0}}}^{+\infty} e^{-t^2} dt \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{E_g}{2N_0}} \right)
 \end{aligned} \tag{47}$$



avendo posto

$$\operatorname{erfc}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_y^{\infty} e^{-t^2} dt \quad (48)$$

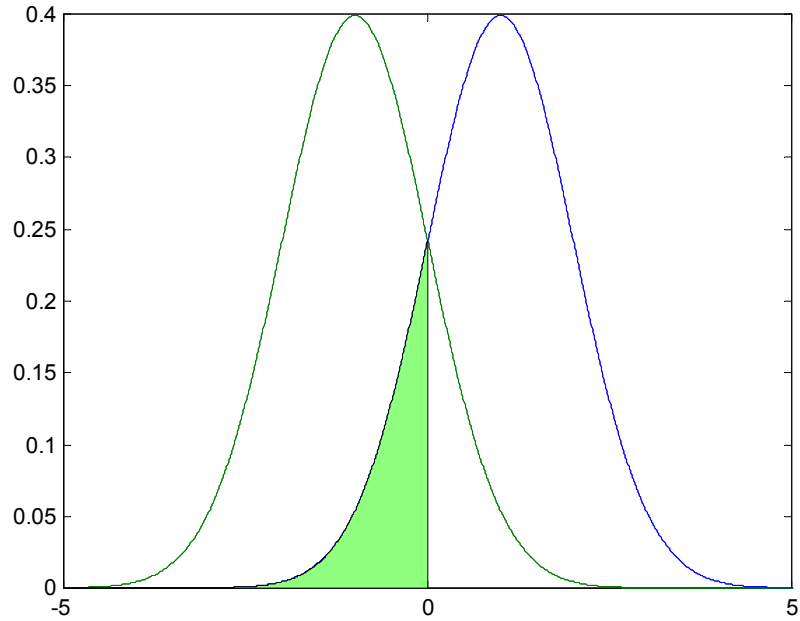


Fig.3. Probabilità d'errore condizionata all'ipotesi  $H_1$

Analogamente la probabilità  $P_{e/H_1}$  di commettere un errore quando viene trasmesso il simbolo 1 vale

$$\begin{aligned} P_{e/H_1} &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi 4W^2 E_g N_0}} e^{-\frac{(\zeta - 2WE_g)^2}{8W^2 E_g N_0}} d\zeta \\ &= \int_{2WE_g}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi 4W^2 E_g N_0}} e^{-\frac{\zeta^2}{8W^2 E_g N_0}} d\zeta \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-\sqrt{\frac{E_g}{2N_0}}} e^{-t^2} dt \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{\mathcal{E}_g}{2\mathcal{N}_0}} \right) \quad (49)$$

pertanto per la probabilità d'errore si ha

$$\begin{aligned} P_e &= P_{e/H_0} P_0 + P_{e/H_1} P_1 = (P_0 + P_1) \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{\mathcal{E}_g}{2\mathcal{N}_0}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{\mathcal{E}_g}{2\mathcal{N}_0}} \right) \end{aligned} \quad (50)$$

L'andamento della probabilità d'errore in funzione del rapporto segnale-rumore è riportato in Fig.4.

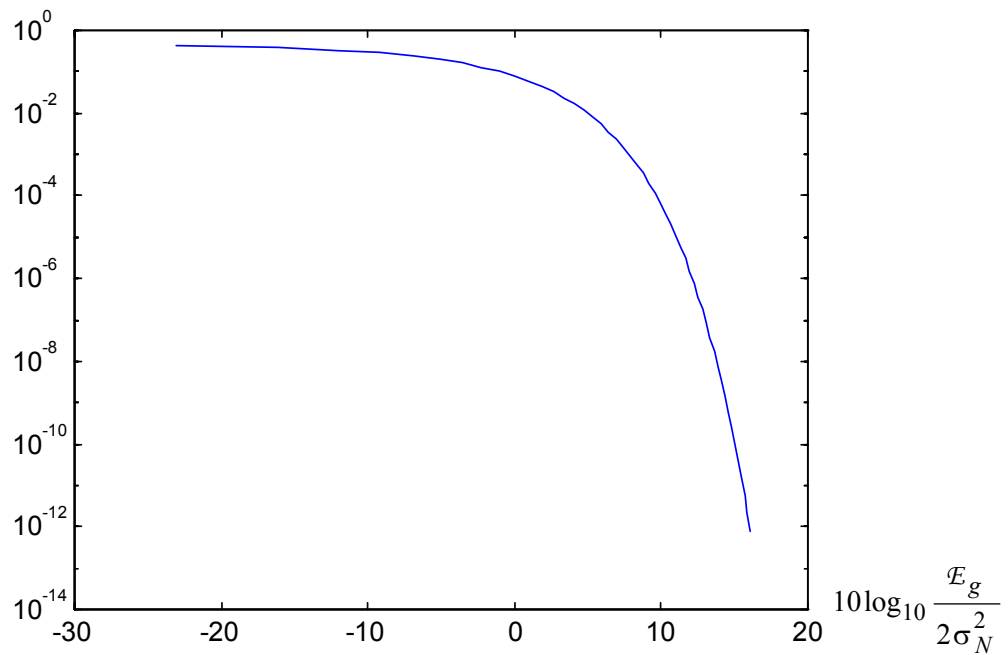


Fig.4. Probabilità d'errore

**RICEVITORE A  
FILTRO ADATTATO**

Osserviamo ora che

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \mathbf{z}^T \mathbf{s}_j = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^M z \left( \frac{k}{2W} \right) s_j \left( \frac{k}{2W} \right) = 2W \varepsilon_{zs_j}(0), \quad j=0,1, \quad (51)$$

pertanto per  $M$  tendente a infinito, la regola di decisione diviene

$$\varepsilon_{s_1 z}(0) - \varepsilon_{s_0 z}(0) \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \frac{\sigma_N^2}{2W} \ln \eta + \frac{1}{2} [\mathcal{E}_{s_1} - \mathcal{E}_{s_0}] \quad (52)$$

essendo  $\mathcal{E}_{s_1}$  e  $\mathcal{E}_{s_0}$  le energie dei suoi segnali  $s_0(t)$  e  $s_1(t)$ .

Si osservi che la correlazione tra il segnale ricevuto e i segnali di riferimento può essere valutata per mezzo di una coppia di filtri con risposte impulsive  $s_0^*(-t)$  e  $s_1^*(-t)$ . Infatti per le note proprietà della funzione di intercorrelazione tra due segnali, di cui almeno uno impulsivo, si ha

$$\varepsilon_{s_j z}(0) = \left[ s_j^*(-t) * z(t) \right]_{t=0}. \quad (53)$$

Pertanto, come illustrato in fig.3, la rivelazione ottima in presenza di rumore gaussiano può essere effettuata comparando con una soglia l'uscita di un sistema lineare. In questo caso il ricevitore, il cui schema a blocchi è illustrato in Fig.5, prende il nome di ricevitore a filtro adattato.

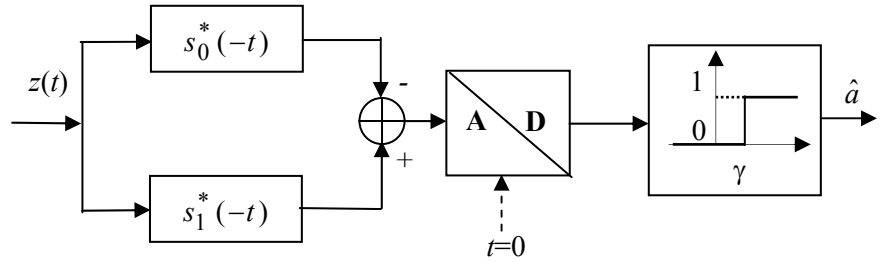


Fig.5 - Ricevitore a filtro adattato

Osserviamo infine che se le due forme d'onda risultano pari a

$$s_0(t) = -g(t) \quad (54)$$

$$s_1(t) = g(t) \quad (55)$$

il calcolo del rapporto di verosimiglianza richiede un unico filtro adattato, in quanto la relazione (52) si riduce a

$$2\varepsilon_{gz}(0) \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \frac{\sigma_N^2}{2W} \ln \eta. \quad (56)$$

Il relativo schema a blocchi è illustrato in Fig.6.

Inoltre nel caso usuale di costo uniforme, (19), e simboli d'ingresso equiprobabili la soglia è nulla e la regola di decisione si semplifica ulteriormente come segue

$$\varepsilon_{gz}(0) \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} 0 \quad (57)$$

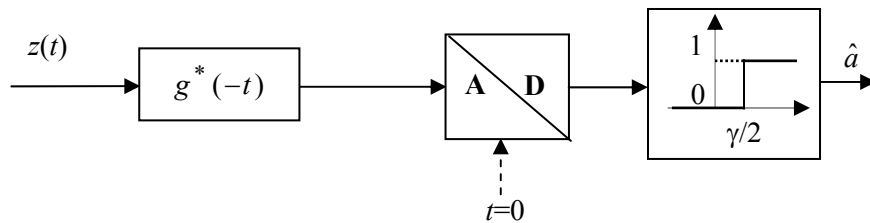


Fig.6 - Ricevitore a filtro adattato

## 5. VERIFICA DI IPOTESI L-ARIA

Si consideri ora il problema di decisione, noto come *verifica di ipotesi L-ria*, in cui la v.a. di interesse  $\mathbf{X}$  è una v.a. discreta con  $L$  possibili determinazioni, a cui verranno associate nel seguito rispettivamente le ipotesi  $H_0, \dots, H_{L-1}$ . Indicata con  $\mathbf{z}$  la generica determinazione della v.a.  $\mathbf{Z}$   $N$ -dimensionale osservabile, il meccanismo di transizione probabilistica che descrive l'operazione di misura è descritto dalle f.d.p. condizionate

$$p_{\mathbf{Z}/H_j}(\mathbf{z}/H_j) \quad j = 0, \dots, L-1.$$

Indicando con  $\Gamma_j$  la regione dello spazio d'osservazione  $\mathbf{Z}$   $N$ -dimensionale tale che ad ogni osservazione  $\mathbf{z} \in \Gamma_j$  venga fatta corrispondere l'ipotesi  $H_j$ , il rischio assoluto vale

$$R[\hat{H}(\cdot)] = \sum_{j=0}^{L-1} \sum_{i=0}^{L-1} C_{ji} \Pr\{\hat{H}_j, H_i\}.$$

Si osservi che esso può essere riscritto nella forma seguente:

$$\begin{aligned} R[\hat{H}(\cdot)] &= \sum_{j=0}^{L-1} \sum_{i=0}^{L-1} C_{ji} \Pr\{H_i / \hat{H}_j\} \Pr\{\hat{H}_j\} \\ &= \sum_{j=0}^{L-1} \int_{\Gamma_j} \left( \sum_{i=0}^{L-1} C_{ji} \Pr\{H_i / \mathbf{z}\} \right) p_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \end{aligned}$$

Indicando con

$$\beta_j(\mathbf{z}) = \sum_{i=0}^{L-1} C_{ji} \Pr\{H_i / \mathbf{z}\}$$

il rischio assoluto diviene

$$\begin{aligned} R[\hat{H}(\cdot)] &= \sum_{j=0}^{L-1} \int_{\Gamma_j} \beta_j(\mathbf{z}) p_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \\ &= \int_{\Gamma_0} \beta_0(\mathbf{z}) p_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) d\mathbf{z} + \dots + \int_{\Gamma_j} \beta_j(\mathbf{z}) p_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) d\mathbf{z} + \dots + \int_{\Gamma_{L-1}} \beta_{L-1}(\mathbf{z}) p_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \end{aligned}$$

Pertanto la regola di decisione che rende minimo il rischio assoluto assegnerà il generico punto  $\mathbf{z}$  all'insieme  $\Gamma_j$  per il quale risulti minimo il valore dell'integrando, ovvero:

$$\begin{aligned}\Gamma_j &= \left\{ \mathbf{z} \mid \beta_j(\mathbf{z}) p_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) < \beta_m(\mathbf{z}) p_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}), \forall m \neq j \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{z} \mid \beta_j(\mathbf{z}) < \beta_m(\mathbf{z}), \forall m \neq j \right\}\end{aligned}$$

Nel caso di funzione di costo uniforme, ovvero

$$C_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ 1 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

si ha:

$$\begin{aligned}\beta_j(\mathbf{z}) &= \sum_{i \neq j} \Pr\{H_i / \mathbf{z}\} \\ &= 1 - \Pr\{H_j / \mathbf{z}\}\end{aligned}$$

quindi, poiché la regola di decisione ottima comporta la minimizzazione di  $\beta_j(\mathbf{z})$ , la soluzione ottima coincide con la massimizzazione della probabilità condizionata  $\Pr\{H_j / \mathbf{z}\}$ .

Osservando che

$$\Pr\{H_j / \mathbf{z}\} = \frac{p_{\mathbf{z}/H_j}(\mathbf{z} / H_j) P_{H_j}}{p_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})}$$

per le regioni di decisione si ottiene

$$\Gamma_j = \left\{ \mathbf{z} \mid \frac{p_{\mathbf{z}/H_j}(\mathbf{z} / H_j)}{p_{\mathbf{z}/H_m}(\mathbf{z} / H_m)} > \frac{P_{H_m}}{P_{H_j}}, \forall m \neq j \right\}.$$

Pertanto la decisione richiede il calcolo di L-1 rapporti di verosimiglianza.

---

**FUNZIONALE DI  
VEROSIMIGLIANZA  
GENERALIZZATA**

---

Nella verifica di ipotesi  $L$ -aria, si definisce funzionale di verosimiglianza generalizzata  $\Lambda_j(\mathbf{z})$  il rapporto tra la funzione di densità di probabilità della variabile aleatoria  $\mathbf{Z}$  condizionata all'ipotesi generica  $H_j$  ed una funzione arbitraria che non dipende da  $H_j$ :

$$\Lambda_j(\mathbf{z}) = \frac{p_{\mathbf{z}/H_j}(\mathbf{z}/H_j)}{w(\mathbf{z})}$$

La regola di decisione ottima porta pertanto a selezionare, per ogni osservazione  $\mathbf{z}$ , l'ipotesi corrispondente al massimo del prodotto  $\Lambda_j(\mathbf{z})P_{H_j}$ .

#### **4. RIVELAZIONE L-ARIA IN RUMORE GAUSSIANO**

Con riferimento ai sistemi di telecomunicazione, consideriamo ora il caso in cui la sorgente emetta un simbolo appartenente all'alfabeto di sorgente  $\mathcal{A}$  ad  $L$  determinazioni

$$\mathcal{A} = (a_1, a_2, \dots, a_j, \dots, a_L)$$

e che conseguentemente venga trasmessa una tra  $L$  possibili forme d'onda  $s_j(t)$ .

Come nel caso binario, assumiamo inoltre che entrambe le forme d'onda siano limitate in banda  $[-W, W]$ , cosicché si possa fare riferimento alla rappresentazione costituita dai campioni

$$\left\{ s_i \left( \frac{k}{2W} \right) \right\}, \quad j = 0, \dots, L-1,$$

Si supponga inoltre che il segnale ricevuto sia affetto da un rumore additivo modellabile come una realizzazione  $n(t)$  di un processo gaussiano, stazionario, ergodico, a valor medio nullo e spettro di densità di potenza uniforme pari a  $\mathcal{N}_0$  nella banda  $[-W, W]$ .

L'obiettivo è quello di decidere quale simbolo sia stato trasmesso, a partire dall'osservazione di un numero finito, diciamo  $M$ , di campioni del segnale ricevuto  $z(t)$ .

Come nel caso binario, il problema può essere riscritto in modo compatto come segue

$$H_j : \mathbf{z} = \mathbf{n} + \mathbf{s}_j, \quad j = 0, \dots, L-1.$$

Dalla precedente relazione discende che la densità di probabilità della variabile aleatoria  $\mathbf{Z}$  condizionata all'ipotesi  $H_j$  vale

$$p_{\mathbf{Z}/H_j}(\mathbf{z}/H_j) = p_{\mathbf{N}}(\mathbf{z} - \mathbf{s}_j) \quad .$$

Poiché  $\mathbf{N}$  è una variabile aleatoria gaussiana  $M$ -dimensionale, a valor atteso nullo, la sua funzione di densità di probabilità vale

$$p_{\mathbf{N}}(\mathbf{n}) = \frac{1}{(2\pi)^{M/2} \sqrt{\det[\mathbf{K}_{\mathbf{N}}]}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{n}^T \mathbf{K}_{\mathbf{N}}^{-1} \mathbf{n}} \quad .$$

Inoltre avendo assunto che lo spettro di densità di potenza è uniforme nella banda  $[-W, W]$ , i campioni di rumore sono tra loro in correlati e la matrice di covarianza diviene proporzionale alla matrice identità:

$$\mathbf{K}_{\mathbf{N}} = \sigma_N^2 \mathbf{I},$$

avendo posto

$$\sigma_N^2 = 2W\mathcal{N}_0.$$

Pertanto la funzione di densità di probabilità si riduce a

$$p_{\mathbf{N}}(\mathbf{n}) = \frac{1}{(2\pi\sigma_N^2)^{M/2}} e^{-\frac{\mathbf{n}^T \mathbf{n}}{2\sigma_N^2}}.$$

Conseguentemente si ha

$$p_{\mathbf{Z}/H_j}(\mathbf{z}/H_j) = \frac{1}{(2\pi\sigma_N^2)^{M/2}} e^{-\frac{[\mathbf{z}-\mathbf{s}_j]^T [\mathbf{z}-\mathbf{s}_j]}{2\sigma_N^2}}$$

Pertanto, nel caso di simboli equiprobabili il decisore ottimo seleziona l'ipotesi per la quale risulta minima la distanza tra  $\mathbf{z}$  e  $\mathbf{s}_j$ .



$$Arg \left\{ Max_j \left[ p_{\mathbf{z}/H_j}(\mathbf{z} / H_j) \right] \right\} = Arg \left\{ Min_j \left[ \left[ \mathbf{z} - \mathbf{s}_j \right]^T \left[ \mathbf{z} - \mathbf{s}_j \right] \right] \right\}$$

Infine, prendendo come funzione peso arbitraria  $w(\mathbf{z})=p_N(\mathbf{z})$ , i funzionali di versosimiglianza generalizzati divengono

$$\begin{aligned} \ln \Lambda_i(\mathbf{z}) &= \ln \frac{p_{\mathbf{z}/H_j}(\mathbf{z} / H_j)}{p_N(\mathbf{z})} = \\ &= -\frac{\left[ \mathbf{z} - \mathbf{s}_j \right]^T \left[ \mathbf{z} - \mathbf{s}_j \right]}{2\sigma_N^2} + \frac{\left[ \mathbf{z} \right]^T \left[ \mathbf{z} \right]}{2\sigma_N^2} = \\ &= -\frac{\mathbf{z}^T \mathbf{z} - \mathbf{z}^T \mathbf{s}_j - \mathbf{s}_j^T \mathbf{z} + \mathbf{s}_j \mathbf{s}_j^T - \mathbf{z}^T \mathbf{z}}{2\sigma_N^2} = \\ &= \frac{\mathbf{z}^T \mathbf{s}_j}{\sigma_N^2} + \frac{\mathbf{s}_j \mathbf{s}_j^T}{2\sigma_N^2} \end{aligned}$$

---

**RICEVITORE A  
CORRELAZIONE**

---

Se, come in genere accade, le forme d'onda risultano pari a

$$s_j(t) = v_j g(t), \quad j = 0, \dots, L-1$$

ovvero

$$\mathbf{s}_j = v_j \mathbf{g},$$

le regioni di decisione risultano

$$\begin{aligned} \Gamma_j &= \left\{ \mathbf{z} \left| \left[ \mathbf{z} - \mathbf{s}_j \right]^T \left[ \mathbf{z} - \mathbf{s}_j \right] < \left[ \mathbf{z} - \mathbf{s}_m \right]^T \left[ \mathbf{z} - \mathbf{s}_m \right] \quad \forall m \neq j \right. \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{z} \left| 2v_j \mathbf{z}^T \mathbf{g} - v_j^2 \mathbf{g}^T \mathbf{g} > 2v_m \mathbf{z}^T \mathbf{g} - v_m^2 \mathbf{g}^T \mathbf{g} \quad \forall m \neq j \right. \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{z} \left| 2(v_j - v_m) \mathbf{z}^T \mathbf{g} < (v_j^2 - v_m^2) \mathbf{g}^T \mathbf{g} \quad \forall m \neq j \right. \right\} \end{aligned}$$

In definitiva

$$\Gamma_j = \left\{ \mathbf{z} \left| \frac{v_j + v_{j-1}}{2} \mathbf{g}^T \mathbf{g} < \mathbf{z}^T \mathbf{g} < \frac{v_j + v_{j+1}}{2} \mathbf{g}^T \mathbf{g} \right. \right\} \quad (v_{-1} = -\infty, v_L = +\infty).$$

## *Stima di Parametro*

### APPROCCIO DI BAYES

A differenza del problema di decisione binaria in cui la specificazione della funzione di costo richiede unicamente l'individuazione di quattro valori, cosicché la struttura del decisore ottimo é in genere riconducibile ad una verifica di un rapporto di verosimiglianza in cui la funzione di costo ed il criterio di ottimalità adottato determinano il valore della soglia, nel problema di stima la forma della funzione di costo, che questa volta deve essere assegnata per tutte le coppie

$$[\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z})]$$

che appartengono all'intervallo di interesse, concorre a determinare insieme al criterio la forma dello stimatore.

Poiché di norma risulta estremamente difficile ed oneroso individuare una funzione di costo che modelli pienamente le conseguenze di una stima errata, in genere si preferisce adottare per essa una versione semplificata la cui forma sia relativamente semplice sul piano analitico cosicché il procedimento di ottimizzazione risulti più agevole. Più specificatamente, in molti casi di interesse pratico é realistico assumere che il costo dipenda solamente dall'errore di stima  $\mathbf{e}(\mathbf{x})$  che per definizione risulta pari a:

$$\mathbf{e}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) - \mathbf{x}$$

cosicché é ragionevole richiedere che la funzione di costo sia una funzione non negativa di  $\mathbf{e}(\mathbf{x})$ , convessa verso il basso, e con valore minimo in  $\mathbf{e}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ .

In particolare le funzioni di costo di uso maggiormente ricorrente sono

- la funzione di costo quadratica
- la funzione di costo dipendente dall'errore assoluto
- la funzione di costo con errore assoluto o relativo limitata

Per le predette tipologie di funzioni verrà analizzato in dettaglio il relativo stimatore di Bayes. Al fine di rendere più semplice la derivazione di tali stimatori giova osservare che il rischio di Bayes può essere riscritto nella forma seguente

$$\begin{aligned} R_B[\hat{\mathbf{x}}(\cdot)] &= E_{\mathbf{X}} \{ E_{\mathbf{Z}/\mathbf{X}} \{ C[\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z})] / \mathbf{x} \} \} = \\ &= E_{\mathbf{Z}, \mathbf{X}} \{ C[\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z})] \} = E_{\mathbf{Z}} \{ E_{\mathbf{X}/\mathbf{Z}} \{ C[\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z})] / \mathbf{z} \} \} \\ &= E_{\mathbf{Z}} \{ r'[\mathbf{z}, \hat{\mathbf{x}}(\cdot)] \} \end{aligned} \quad (2.1)$$

avendo indicato con

$$r'[\mathbf{z}, \hat{\mathbf{x}}(\cdot)] = E_{\mathbf{X}/\mathbf{Z}} \{ C[\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z})] / \mathbf{z} \} \quad (2.2)$$

il cosiddetto *rischio condizionato a posteriori*. Pertanto, se, come in genere accade, la funzione di costo é una funzione non negativa, la funzione  $\hat{\mathbf{x}}_B(\mathbf{z})$  che rende minimo il rischio assoluto, rende anche minimo per ciascuna determinazione  $\mathbf{z}$  il corrispondente rischio condizionato a posteriori.

### **Stima a minimo errore quadratico medio (MMSE)**

Per la valutazione dello stimatore di Bayes corrispondente ad una funzione di costo quadratica si consideri inizialmente il caso in cui  $\mathbf{X}$  sia una v.a. unidimensionale. Pertanto la funzione di costo é del tipo:

$$C[x, \hat{x}] = (\hat{x} - x)^2. \quad (2.3)$$

Al fine di derivare lo stimatore di Bayes di osservi che per la predetta funzione di costo il rischio condizionato a posteriori vale

$$\begin{aligned} r'[z, \hat{x}(\cdot)] &= E_{X/Z} \{ [\hat{x}(z) - x]^2 / z \} = \\ &= E_{X/Z} \{ x^2 / z \} - 2E_{X/Z} \{ x\hat{x}(z) / z \} + E_{X/Z} \{ [\hat{x}(z)]^2 / z \} = \\ &= E_{X/Z} \{ x^2 / z \} - 2\hat{x}(z)E_{X/Z} \{ x / z \} + [\hat{x}(z)]^2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

La precedente é una funzione quadratica cosicché assume il suo minimo nel punto in cui si annulla la sua derivata rispetto a  $\hat{x}(z)$ . Pertanto la stima di Bayes per funzione di costo quadratico  $\hat{x}^{MMSE}(z)$  nota anche come stima a minimo errore quadratico medio o come stima MMSE (Minimum-Mean-Squared-Error), é data da:

$$\begin{aligned} \hat{x}^{MMSE}(z) &= E_{X/Z} \{ x / z \} = \\ &= \int_X x p_{X/Z}(x/z) dx \end{aligned}$$

ossia dal valore atteso condizionato a posteriori.

Nel caso in cui  $\mathbf{X}$  sia una v.a. N-dimensionale la funzione di costo diviene una forma quadratica del tipo:

$$C[\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}] = (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})^T \mathbf{Q} (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})$$

In cui  $\mathbf{Q}$  é una matrice quadrata simmetrica, definita positiva. In tal caso il rischio condizionato a posteriori vale

$$\begin{aligned} r'[z, \hat{\mathbf{x}}(\cdot)] &= E_{\mathbf{X}/Z} \{ [\hat{\mathbf{x}}(z) - \mathbf{x}]^T \mathbf{Q} [\hat{\mathbf{x}}(z) - \mathbf{x}] / z \} = \\ &= E_{\mathbf{X}/Z} \{ \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} / z \} - 2E_{\mathbf{X}/Z} \{ \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \hat{\mathbf{x}}(z) / z \} + E_{\mathbf{X}/Z} \{ [\hat{\mathbf{x}}(z)]^T \mathbf{Q} [\hat{\mathbf{x}}(z)] / z \} = \\ &= E_{\mathbf{X}/Z} \{ \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} / z \} - 2E_{\mathbf{X}/Z} \{ \mathbf{x}^T / z \} \mathbf{Q} \hat{\mathbf{x}}(z) + [\hat{\mathbf{x}}(z)]^T \mathbf{Q} [\hat{\mathbf{x}}(z)] \end{aligned}$$

ed assume il valore minimo in  $\hat{\mathbf{x}}^{MMSE}(z)$  pari al valore atteso condizionato a posteriori:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}^{MMSE}(z) &= E_{\mathbf{X}/Z} \{ \mathbf{x} / z \} = \\ &= \int_{\mathbf{X}} \mathbf{x} p_{\mathbf{X}/Z}(\mathbf{x}/z) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

### **Stima a minimo errore assoluto medio (MMAE)**

Un'altra funzione spesso adottata é quella che fa riferimento ad una funzione di costo dipendente dall'errore assoluto che nel caso di stima di v.a. unidimensionale si scrive come segue

$$C[x, \hat{x}] = |\hat{x} - x|.$$

Poiché in tal caso si ha:

$$\frac{\partial C[x, \hat{x}]}{\partial \hat{x}} = \text{sign}[\hat{x} - x]$$

é facile verificare che la minimizzazione del rischio condizionato a posteriori conduce alla soluzione di Bayes a minimo errore assoluto medio, anche nota come soluzione MMAE (Minimum-Mean-Absolute-Error) individuata dalla relazione:

$$\int_{-\infty}^{\hat{x}^{MMAE}} p_{X/Z}(x/z) dz = \int_{\hat{x}^{MMAE}}^{+\infty} p_{X/Z}(x/z) dz$$

ossia dal valore mediano condizionato a posteriori.

Tale stima coincide con la stima MMSE solo nel caso in cui la f.d.p. condizionata a posteriori presenta lo stesso valore per il valore atteso e per il valore mediano.

### **Stima a massima probabilità a posteriori (MPA)**

La stima a massima probabilità a posteriori, nota anche come stima MPA (Maximum A Posteriori Probability) é una procedura di uso frequente che può essere inquadrata in un contesto bayesiano anche se non é una procedura di

Bayes in senso stretto. Essa può essere derivata tramite una operazione di limite dalla soluzione di Bayes relativa alla funzione di costo uniforme:

$$C[x, \hat{x}] = \begin{cases} 0 & \text{se } |\hat{x} - x| \leq \Delta \\ 1 & \text{se } |\hat{x} - x| > \Delta \end{cases}$$

con  $\Delta > 0$ . Poiché in questo caso il costo condizionato a posteriori relativo ad un generico stimatore  $\hat{x}(z)$  vale

$$\begin{aligned} r'[z, \hat{x}(\cdot)] &= E_{X/Z} \{C[\hat{x}(z) - x] / z\} = \Pr \{|\hat{x}(z) - x| > \Delta / Z = z\} = \\ &= 1 - \Pr \{|\hat{x}(z) - x| \leq \Delta / Z = z\} \end{aligned}$$

è facile verificare che il valore che minimizza il rischio condizionato a posteriori è quello che rende massima la probabilità condizionata a posteriori che  $x$  cada nell'intervallo

$$[\hat{x}(z) - \Delta, \hat{x}(z) + \Delta].$$

Di conseguenza facendo tendere  $\Delta \rightarrow 0$ , il valore stimato tramite la procedura di Bayes tende al valore di  $x$  che rende massima la funzione di densità di probabilità condizionata a posteriori, cioè:

$$\hat{x}_{MPA} = \arg \left\{ \max_{x \in X} p_{X/Z}(x/z) \right\}.$$

Tale stima coincide con le stime MMSE e MMAE nel caso in cui la f.d.p. condizionata a posteriori sia simmetrica rispetto al valore atteso e unimodale.

### **Stima a massima verosimiglianza (ML)**

Come stato di fatto, in molti casi pratici non è possibile fare ricorso a tecniche di stima bayesiane sia perché non si dispone di una descrizione statistica a priori sufficientemente completa del messaggio, sia per l'elevata complessità analitica delle operazioni di ottimizzazione che dovrebbero essere effettuate. Una

possibile alternativa in questi casi é costituita dalla cosiddetta procedura di stima a massima verosimiglianza, o stima ML (Maximum-Likelihood).

Tale procedura si basa sulla massimizzazione della funzione di verosimiglianza rappresentata dalla funzione di densità di probabilità dell'osservazione condizionata rispetto al messaggio da stimare. Pertanto la stima ottima secondo questo criterio vale:

$$\hat{x}_{ML} = \arg \left\{ \max_{x \in X} p_{Z/X}(z/x) \right\}.$$

Poiché il logaritmo naturale é una funzione monotona crescente del suo argomento, la stima a massima verosimiglianza può essere scritta anche nella forma seguente

$$\hat{x}_{ML} = \arg \left\{ \max_{x \in X} \ln p_{Z/X}(z/x) + \beta \right\}.$$

in cui  $\beta$  é una costante positiva arbitraria.



## *Modulazioni numeriche*

### INTERFERENZA INTERSIMBOLICA

Si considerino due utenti che scambiano tra loro flussi informativi numerici di lunghezza indefinita in modo isocrono. Assumiamo che essi siano connessi tramite una rete capace di trasmettere segnali analogici limitati in banda  $[-W, W]$  contigua all'origine.

Il flusso informativo simbolico  $\{\alpha[k]\}$  sia una realizzazione costituita da una successione indefinita di caratteri appartenenti all'alfabeto di sorgente  $\mathcal{A}$  ad  $L$  determinazioni

$$\mathcal{A} = (a_1, a_2, \dots, a_j, \dots, a_L) \quad (3.1)$$

Il flusso informativo  $\{\alpha[k]\}$  passa attraverso un formatore di impulsi, che in corrispondenza del  $k$ -esimo  $\alpha[k]$  genera in uscita un impulso matematico con area  $v[n]$ , secondo una predefinita trasformazione biunivoca che associa a ciascun simbolo dell'alfabeto  $\mathcal{A}$  uno tra  $L$  livelli equispaziati nell'intervallo  $[-A, A]$ :

$$v_j = \frac{2A}{L-1} j - A, \quad j = 0, 1, \dots, L-1, \quad (3.2)$$

cosicché il segnale all'uscita del circuito formatore d'impulsi è del tipo

$$b(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} v[m] u_0(t - mT_L) \quad (3.3)$$

In generale, prima di essere trasmesso il segnale  $b(t)$  viene fatto transitare attraverso un filtro sagomatore  $h_T(t)$  ed un amplificatore con guadagno  $G_T$ , dando così origine ad un'onda PAM  $s(t)$  del tipo

$$s(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} v[m] G_T h_T(t - mT_L) . \quad (3.4)$$

Il segnale  $s(t)$  transita successivamente attraverso il canale di trasmissione modellabile per mezzo di un filtro con risposta impulsiva  $h_C(t)$  ed un rumore additivo  $n(t)$ , gaussiano, stazionario ergodico, a valor atteso nullo e noto spettro di densità di potenza uniforme nella banda  $[-W, W]$ .

Di conseguenza, il segnale ricevuto  $r(t)$  vale

$$r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v[n] g(t - nT_L) + n(t) , \quad (3.5)$$

avendo posto

$$g(t) = G_T h_T(t) * h_C(t) . \quad (3.6)$$

In base ai risultati relativi alla rivelazione di un segnale in rumore gaussiano, se la sorgente emette un unico simbolo il ricevitore ottimo è costituito dal ricevitore a correlazione, seguito da un campionatore e da un decisore a soglia.

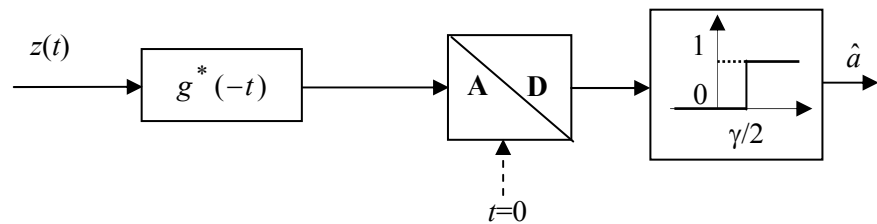


Fig.1 - Ricevitore a filtro adattato

Lo scopo di quanto segue è determinare sotto quali condizioni, il predetto schema costituisca la soluzione ottima anche nel caso della trasmissione di una

sequenza indefinita di simboli, ovvero sotto quali condizioni la decisione possa essere effettuata simbolo per simbolo.

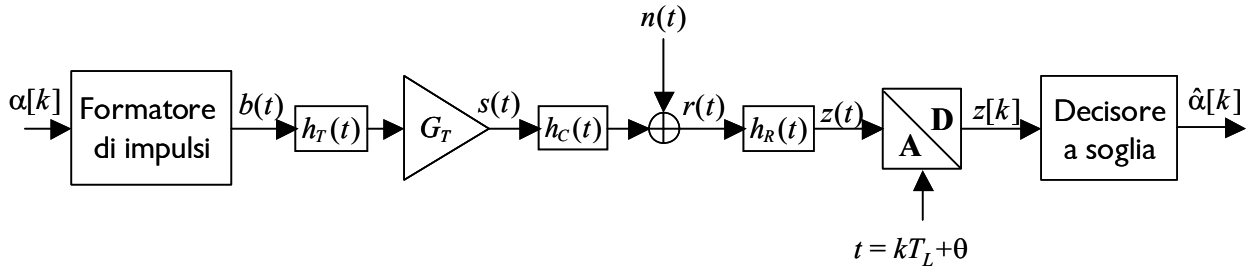


Fig.2- Ricevitore lineare

A tal fine si consideri lo schema di fig.2 che rappresenta un generico ricevitore basato su un filtro, non necessariamente adattato al segnale ricevuto, con in cascata un comparatore a soglia. Posto

$$h(t) = G_T h_T(t) * h_C(t) * h_R(t) \quad (3.7)$$

e

$$n_R(t) = n(t) * h_T(t) \quad (3.8)$$

si ha che il segnale all'ingresso del campionatore ha una forma d'onda del tipo

$$z(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} v[m] h(t - mT_L) + n_R(t). \quad (3.9)$$

Di conseguenza, il segnale a valle del campionatore vale:

$$z[k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} v[m] h(kT_L - mT_L) + n_R(kT_L) \quad (3.10)$$

ovvero

$$z[k] = v[k] h[0] + \sum_{m \neq k} v[m] h[k - m] + n_R[k] \quad (3.11)$$

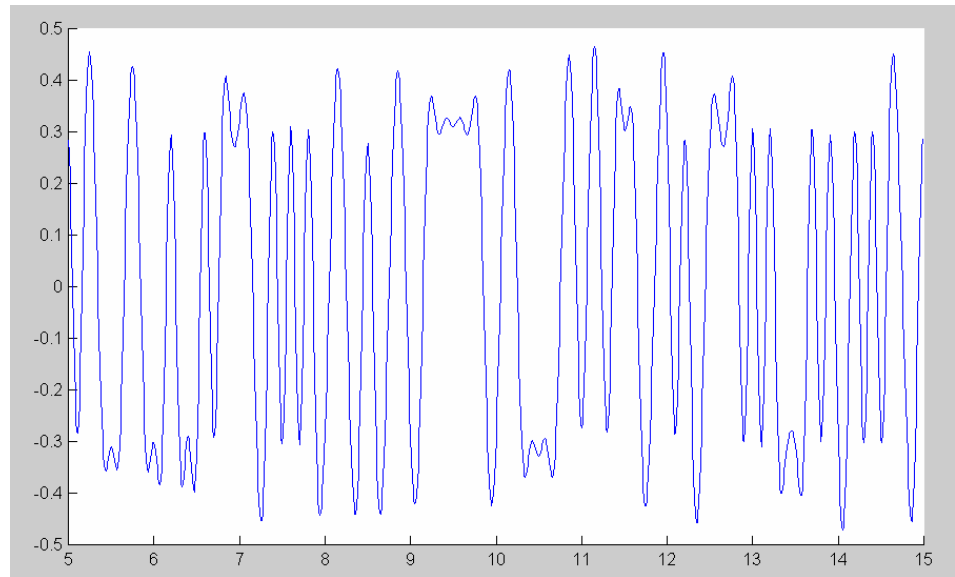


Fig.3. Forma d'onda del segnale all'ingresso del campionatore ( $L=2, T_L=0.1$  s).

Quindi, il segnale all'ingresso del comparatore si compone di due contributi: il segnale

$$z[k] = v[k]h[0] + n_R[k] \quad (3.12)$$

che rappresenta il valore che si otterrebbe qualora la sorgente emettesse il solo simbolo  $\alpha[k]$ , ed il segnale

$$\sum_{m \neq k} v[m]h[k-m] \quad (3.13)$$

che rappresenta l'interferenza introdotta dalla presenza degli altri simboli.

I contributi relativi al rumore ed all'interferenza tra simboli possono essere visualizzati agevolmente tramite un oscilloscopio con memoria con frequenza di scansione orizzontale pari a  $1/T_L$ . L'immagine che si ottiene prende il nome di diagramma ad occhio a causa della sua somiglianza con la forma dell'occhio umano.

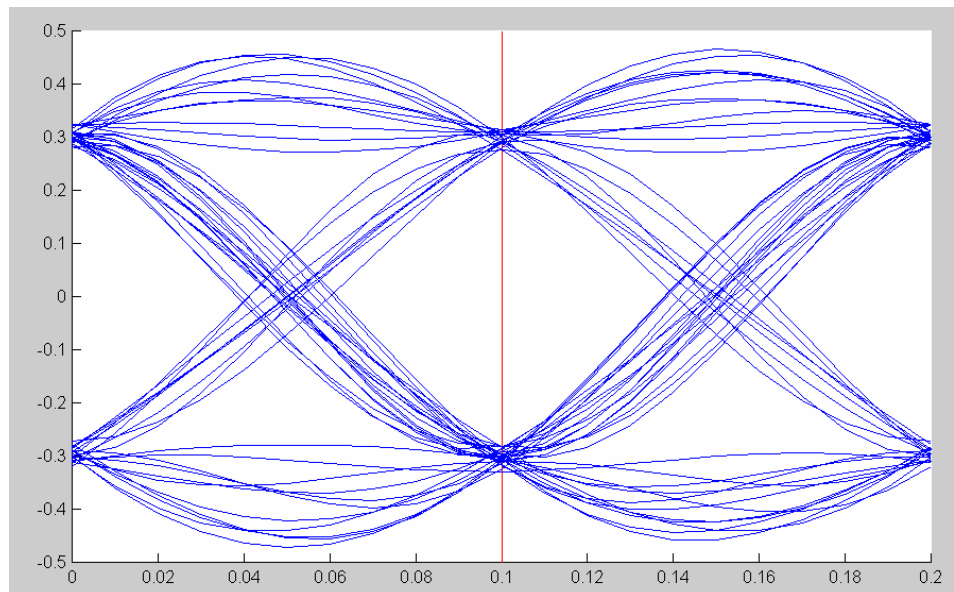


Fig. 4 – Diagramma ad occhio ( $L=2$ ) in presenza di interferenza tra simboli ed in assenza di rumore.

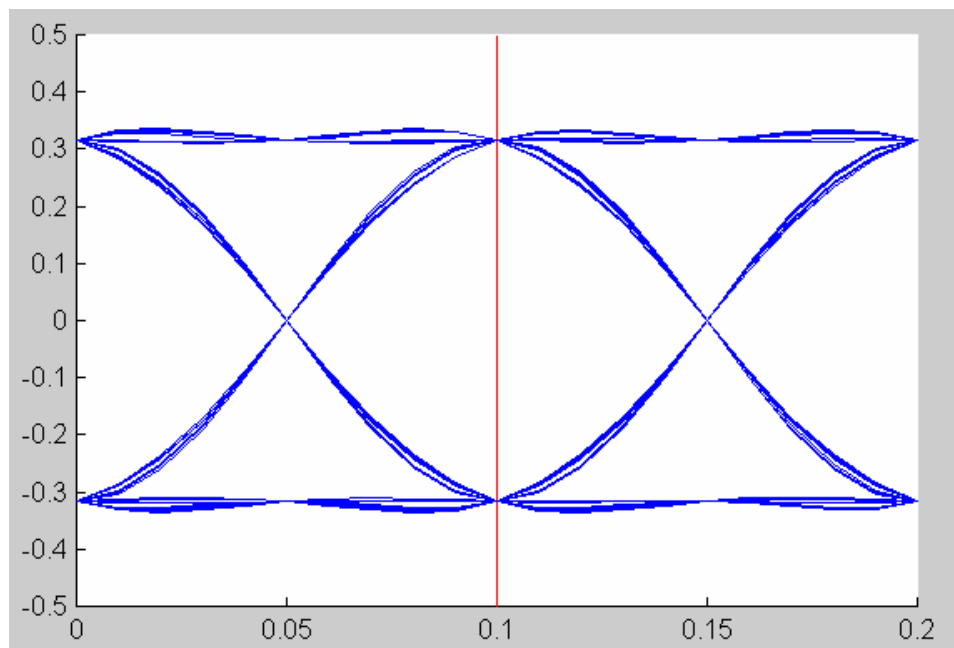


Fig. 5 – Diagramma ad occhio ( $L=2$ ) in assenza di interferenza tra simboli ed in assenza di rumore.

Come illustrato dai diagrammi ad occhio riportati nelle figure 4 e 5, in presenza di interferenza tra simboli l'occhio tende a chiudersi ed il margine nei confronti del rumore si riduce.

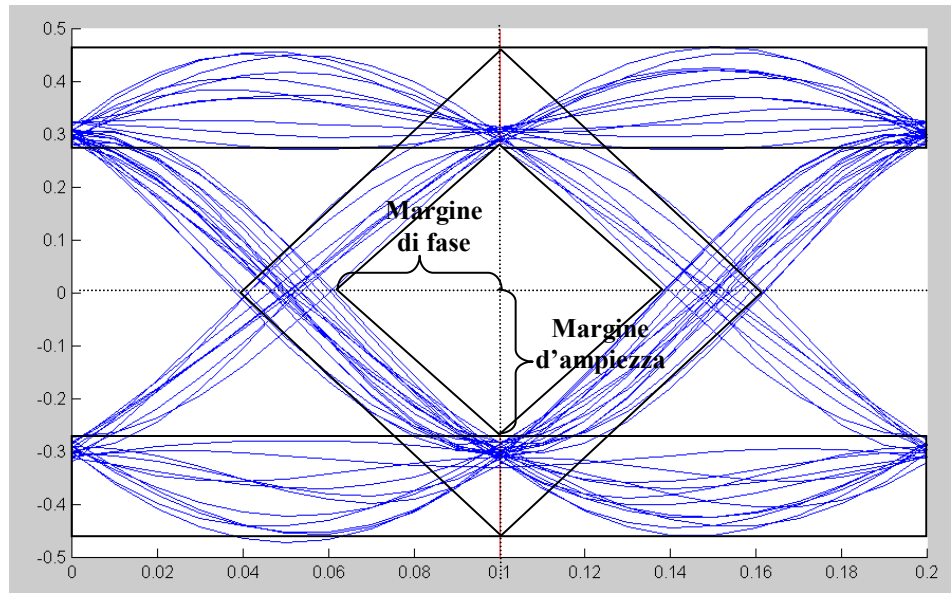


Fig. 6 – Effetti dell'interferenza intersimbolica sul diagramma ad occhio

Analiticamente il diagramma ad occhio può essere ottenuto a partire dalla forma d'onda di  $z(t)$  tramite la seguente trasformazione

$$z_{occhio}(t) = z\left[(t)_{\text{mod } T_L}\right]. \quad (3.14)$$

La possibilità di applicare lo schema di decisione simbolo per simbolo senza introdurre un degrado delle prestazioni si traduce in un vincolo da applicare alla risposta impulsiva complessiva del sistema. Infatti, il termine di interferenza risulta nullo, qualunque sia la sequenza trasmessa, se accade che, a meno di un ritardo costante,

$$h[k] = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad (3.15)$$

ovvero se

$$\begin{aligned} h^0(t) &= h(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_0(t - kT_L) = h(t)\pi_{T_L}(t) = \\ &= u_0(t) \end{aligned} \quad (3.16)$$

avendo posto

$$\pi_{T_L}(t) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_0(t - kT_L) . \quad (3.17)$$

Nel dominio della frequenza la precedente relazione diviene

$$\mathcal{F}\{h(t)\pi_{T_L}(t)\} = 1 \quad (3.18)$$

e, ricordando che

$$\mathcal{F}\{h(t)\pi_{T_L}(t)\} = \frac{1}{T_L} H(f) * \sum_m u_0(f - mf_L) = \frac{1}{T_L} \sum_m H(f - mf_L), \quad (f_L = \frac{1}{T_L}) \quad (3.19)$$

si ha:

$$\boxed{\sum_m H(f - mf_L) = T_L} . \quad (3.20)$$

La condizione (3.20) di assenza di interferenza intersimbolica è nota in letteratura come *criterio di Nyquist*, mentre una funzione di trasferimento che soddisfi la (3.20) viene indicata con il termine di *caratteristica di Nyquist*.

Si consideri ora il caso delle caratteristiche di Nyquist normalizzate, limitate in banda  $[-W, W]$  con  $W$  compreso tra  $f_L/2$  e  $f_L$ . In tal caso, come esemplificato nel grafico di figura, la condizione di Nyquist si riduce a:

$$\boxed{H[\pm(B_N + \Delta f)] = T_L - H[\pm(B_N - \Delta f)], \quad \text{per } 0 \leq \Delta f \leq B_N} \quad (3.21)$$

Si osservi che esiste un numero infinito di funzioni che presentano la simmetria speculare individuata dalla (3.21). D'altro canto, è impossibile generare impulsi di Nyquist con banda inferiore a  $B_N$ . Inoltre esiste una ed una sola caratteristica di Nyquist a banda minima. Essa è pari a :

$$H_o(f) = T_L \text{rect}_{f_L}(f) \quad (3.22)$$

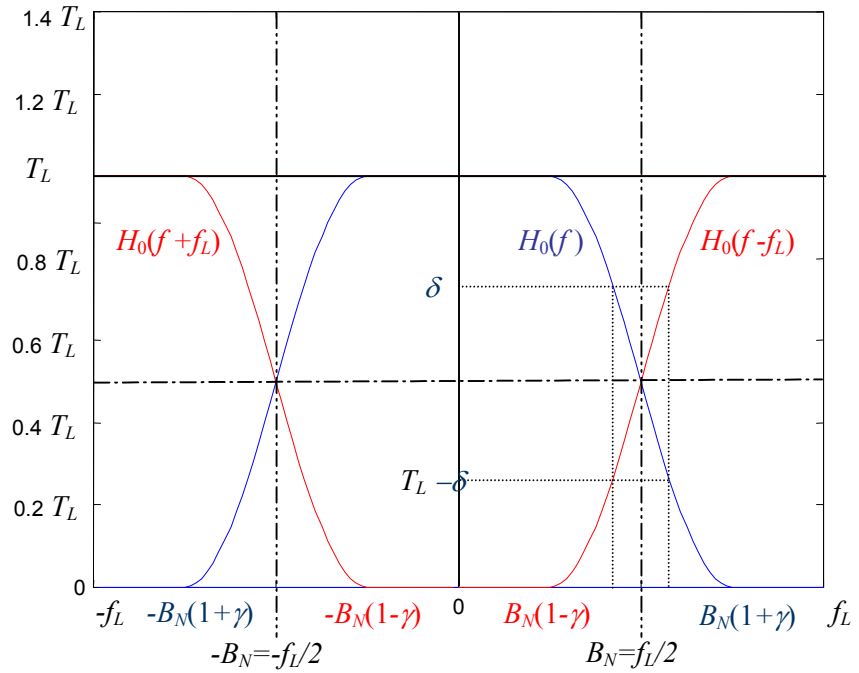


Fig. 7 – Caratteristica di Nyquist.

La famiglia di caratteristiche di *Nyquist* più nota è quella denominata a *coseno rialzato*; essa è pari a

$$G_0(f) = \begin{cases} \frac{T_L}{2} \left\{ 1 - \sin \left[ \frac{\pi}{2\gamma B_N} (f - B_N) \right] \right\} & 0 \leq |f| \leq B_N (1 - \gamma) \\ 0 & B_N (1 - \gamma) \leq |f| \leq B_N (1 + \gamma) \\ 0 & |f| > B_N (1 + \gamma) \end{cases} \quad (3.23)$$

essendo

$$B_N = \frac{f_L}{2} \quad (3.24)$$

e  $\gamma$  una costante, indicata in letteratura con il termine di *roll-off*, compresa tra 0 e 1.



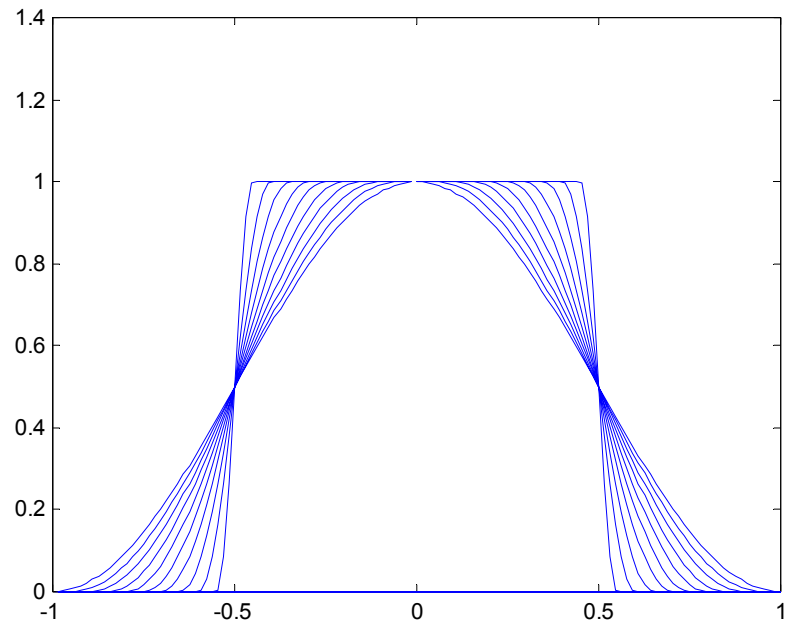


Fig. 8. caratteristiche di Nyquist a coseno rialzato

Le corrispondenti risposte impulsive presentano il seguente andamento temporale

$$g_0(t) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T_L}t\right)}{\frac{\pi}{T_L}t} \frac{\cos\left(\frac{\gamma}{T_L}\frac{\pi}{2}t\right)}{1 - 4\gamma^2\left(\frac{t}{T_L}\right)^2} \quad (3.25)$$

Come illustrato dalle figure 10 e 11, al diminuire del roll-off l'occhio tende a chiudersi ed il margine temporale diminuisce.

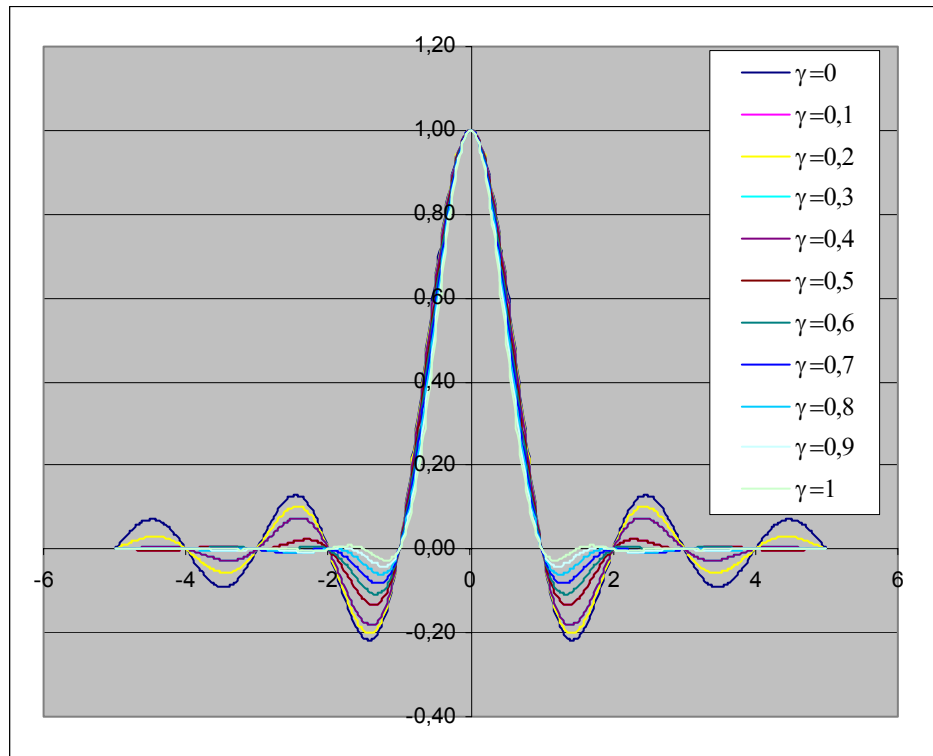


Fig. 9 – Risposta impulsiva del filtro con funzione di trasferimento a coseno rialzato.

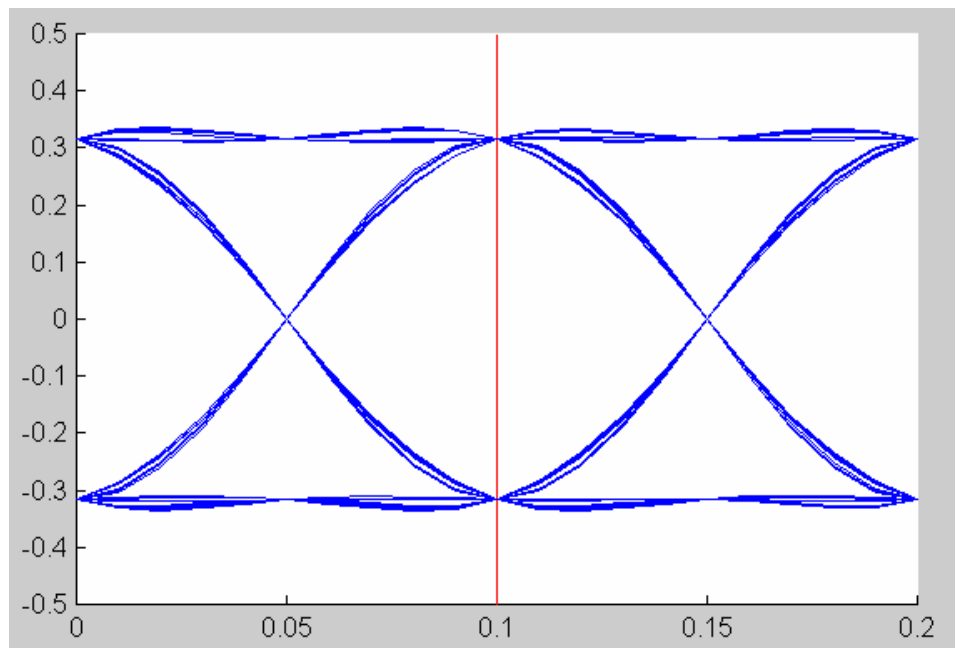


Fig. 10 – Diagramma ad occhio per roll-off  $\gamma=1$ .

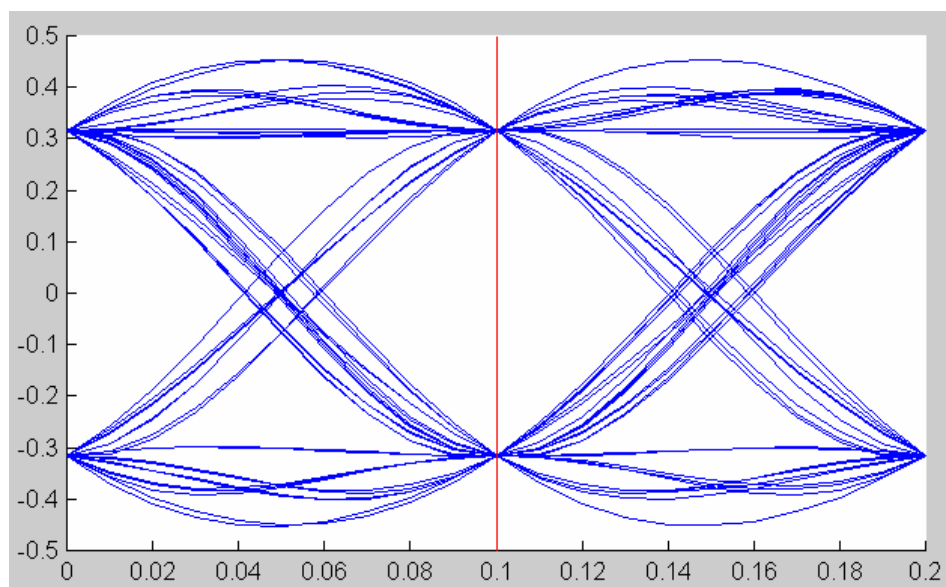


Fig. 11 – Diagramma ad occhio per roll-off  $\gamma=0.5$ .

## MODULAZIONE ASK

Come illustrato nel paragrafo precedente, nella modulazione ASK il segnale  $s(t)$  trasmesso è costituito da un'onda PAM a simboli indipendenti

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v[n] G_T h_T(t - nT_L) \quad (3.26)$$

I simboli  $v[n]$  appartengono ad un alfabeto composto da  $L$  caratteri corrispondenti a  $L$  livelli equispaziati nell'intervallo  $[-A, A]$ :

$$v_j = \frac{2A}{L-1} j - A, \quad j = 0, 1, \dots, L-1, \quad (3.27)$$

Nel caso di assenza di interferenza intersimbolo, il ricevitore ottimo è l'estensione del ricevitore per trasmissione binaria ed è costituito, quindi, da un filtro seguito da un comparatore a soglia, come illustrato in Fig.6.

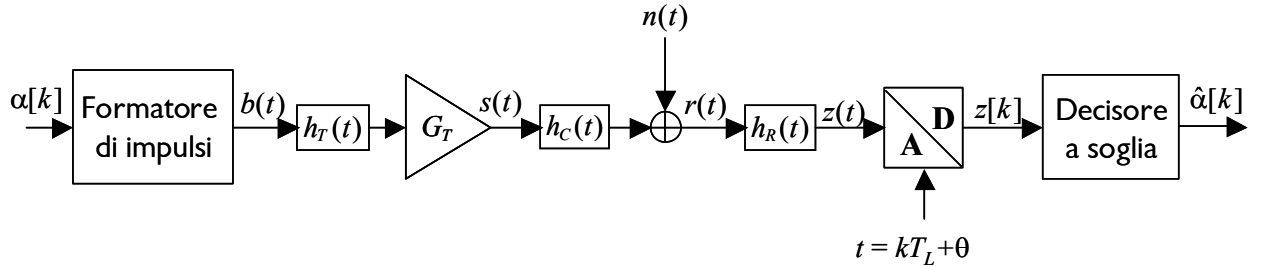


Fig.6 – Schema a blocchi del sistema ASK.

Per il calcolo delle prestazioni del ricevitore, con riferimento allo schema di Fig.6, consideriamo il caso di assenza di interferenza intersimbolica. In tal caso  $z[k]$  vale

$$z[k] = v[k] g_0[0] + n_R[k]. \quad (3.28)$$

Essa è pertanto la determinazione di una variabile aleatoria che, condizionatamente all'ipotesi  $H_j$  è gaussiana con valore atteso e varianza pari a

$$m_{z/H_j} = \left[ \frac{2A}{L-1} j - A \right] g_0(0), \quad (3.29)$$

$$\sigma_{z/H_j}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{N}_0(f) |H_R(f)|^2 df. \quad (3.30)$$

Nel caso di costo uniforme e simboli equiprobabili le regioni di decisione sono

$$\Gamma_j = \begin{cases} \left( -\infty, -Ag_0(0) + \frac{Ag_0(0)}{L-1} \right) & \text{per } j=0 \\ \left( v_j g_0(0) - \frac{Ag_0(0)}{L-1}, v_j g_0(0) + \frac{Ag_0(0)}{L-1} \right) & \text{per } 0 < j < L-1 \\ \left( Ag_0(0) - \frac{Ag_0(0)}{L-1}, \infty \right) & j = L-1 \end{cases} \quad (3.31)$$

pertanto, in relazione alla generica ipotesi  $H_j$  si possono individuare due tipologie di errore. Il primo caso è rappresentato dall'evento errore  $e^+$  che corrisponde al caso in cui la variabile di decisione supera la soglia

$$v_j g_0(0) + \frac{Ag_0(0)}{L-1}. \quad (3.32)$$

Tale evento non si presenta nel caso del simbolo  $v_{L-1}$ .

Il secondo caso è costituito dall'evento errore  $e^-$  corrispondente al caso in cui la variabile di decisione sia inferiore alla soglia

$$v_j g_0(0) - \frac{Ag_0(0)}{L-1}. \quad (3.33)$$

Ovviamente, detto evento non interessa il caso del simbolo  $v_0$ .

Pertanto la probabilità  $P_{e^+/H_j}$  vale

$$\begin{aligned} P_{e^+/H_j} &= \int_{m_{z/H_j} + \frac{Ag_0(0)}{L-1}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{z/H_j}} e^{-\frac{(\zeta - m_{z/H_j})^2}{2\sigma_{z/H_j}^2}} d\zeta \\ &= \int_{\frac{Ag_0(0)}{L-1}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{z/H_j}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_{z/H_j}^2}} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{Ag_0(0)}{\sqrt{2}(L-1)\sigma_{z/H_j}}}^{+\infty} e^{-t^2} dt \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{Ag_0(0)}{\sqrt{2}(L-1)\sigma_{z/H_j}} \right)
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

avendo posto

$$\operatorname{erfc}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_y^{\infty} e^{-t^2} dt \tag{3.35}$$

Analogamente

$$\begin{aligned}
 P_{e^-/H_j} &= \int_{-\infty}^{m_{z/H_j} - \frac{Ag_0(0)}{L-1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{z/H_j}} e^{-\frac{(\zeta - m_{z/H_j})^2}{2\sigma_{z/H_j}^2}} d\zeta \\
 &= \int_{-\infty}^{\frac{Ag_0(0)}{L-1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{z/H_j}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_{z/H_j}^2}} dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{Ag_0(0)}{\sqrt{2}(L-1)\sigma_{z/H_j}}} e^{-t^2} dt \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{Ag_0(0)}{\sqrt{2}(L-1)\sigma_{z/H_j}} \right).
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Pertanto, per la probabilità d'errore sul simbolo si ha

$$\begin{aligned}
 P_e &= P_{e^+/H_0} P_{H_0} + \sum_{j=1}^{L-2} \left( P_{e^-/H_0} + P_{e^+/H_0} \right) P_{H_j} + P_{e^-/H_{L-1}} P_{H_{L-1}} \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{Ag_0(0)}{\sqrt{2}(L-1)\sigma_{z/H_j}} \right) \left[ P_{H_0} + \sum_{j=1}^{L-2} 2P_{H_j} + P_{H_{L-1}} \right]
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Quindi, nel caso di simboli equiprobabili la probabilità d'errore sul simbolo diviene

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{A g_0(0)}{\sqrt{2}(L-1)\sigma_{z/H_j}} \right) \frac{2(L-1)}{L} \quad (3.38)$$

Ovvero,

$$P_e = \left( 1 - \frac{1}{L} \right) \operatorname{erfc}(y) \quad (3.39)$$

essendo

$$y^2 = \frac{A^2 g_0^2(0)}{2(L-1)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{N}_0(f) |H_R(f)|^2 df} . \quad (3.40)$$

È conveniente riscrivere la precedente relazione in funzione dei parametri che caratterizzano sia il trasmettitore che il ricevitore quali la potenza disponibile del trasmettitore  $W_{d_T}$  ed il fattore di rumore del ricevitore. A tal fine si osservi che che, essendo i simboli equiprobabili, si ha

$$\sigma_A^2 = \frac{A^2}{3} \frac{L+1}{L-1} . \quad (3.41)$$

Pertanto per la potenza disponibile all'uscita del trasmettitore si ottiene

$$\begin{aligned} W_{d_T} &= \frac{1}{4R_T} \frac{\sigma_A^2}{T_L} G_T^2 \int_{-\infty}^{\infty} |H_T(f)|^2 df \\ &= \frac{1}{4R_T} \frac{A^2}{3} \frac{L+1}{L-1} \frac{1}{T_L} G_T^2 \int_{-\infty}^{\infty} |H_T(f)|^2 df . \end{aligned} \quad (3.42)$$

Di conseguenza si ha

$$A^2 = 4R_T W_{d_T} 3 \frac{L-1}{L+1} \frac{1}{f_L} \frac{1}{G_T^2 \int_{-\infty}^{\infty} |H_T(f)|^2 df} . \quad (3.43)$$

Quindi sostituendo la (3.43) nella (3.40) si ottiene:

$$y^2 = 4R_T \frac{W_{d_T}}{f_L \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{N}_0(f) |H_R(f)|^2 df} \frac{3}{2} \frac{1}{L^2 - 1} \frac{g_0^2(0)}{G_T^2 \int_{-\infty}^{\infty} |H_T(f)|^2 df} . \quad (3.44)$$

Si consideri ora il caso di una sorgente binaria caratterizzata da un ritmo costante pari a  $f_b$ . Dalla (3.23) discende che, per un valore assegnato  $\gamma$  del roll-off, la trasmissione del flusso informativo tramite una modulazione ASK a 2 livelli richiede una larghezza di banda pari a  $f_b(1 + \gamma)$ . Qualora una banda di tale ampiezza non sia disponibile, si può suddividere il flusso di simboli binari emesso dalla sorgente in blocchi di  $k$  simboli. Ciascun blocco viene poi trasformato in un simbolo appartenente ad un nuovo alfabeto  $\mathcal{B}$  ad  $L=2^k$  determinazioni.

Il flusso dei simboli a valle della trasformazione presenterà un ritmo pari a

$$f_L = \frac{f_b}{k} = \frac{f_b}{\log_2 L} . \quad (3.45)$$

Pertanto la banda necessaria per trasmettere il segnale tramite una modulazione ASK a  $L$  livelli varrà

$$\frac{f_b}{\log_2 L} (1 + \gamma) .$$

Si osservi che nel caso in cui sia assegnata la banda  $[-B, B]$ , il numero di livelli da impiegare deve essere scelto in modo da soddisfare la condizione:

$$\log_2 L \geq \frac{f_b}{2B} (1 + \gamma) . \quad (3.46)$$

Poiché, come mostrato nel seguito, a parità di altre condizioni le prestazioni della modulazione ASK peggiorano con l'aumentare del numero di livelli impiegati, è opportuno scegliere  $L$  pari al più piccolo intero che soddisfa la (3.46).



In relazione alla trasformazione si osserva che in genere l'errore più frequente consiste nella scelta di uno dei due livelli adiacenti a quello trasmesso. Pertanto, è consuetudine adottare per la trasformazione il *codice di Gray*, che presenta la proprietà che tra simboli adiacenti varia una sola delle  $k$  cifre binarie che compongono un blocco.

Il codice di Gray  $\{\beta_i^{(k)}, i=1, \dots, 2^k\}$  relativo a blocchi di  $k$  simboli può essere costruito a partire dal codice  $\{\beta_i^{(k-1)}, i=1, \dots, 2^{k-1}\}$  relativo a blocchi di  $k-1$  simboli con la seguente regola: le prime  $2^{k-1}$  righe della tabella di codifica si ottengono concatenando il simbolo 0 con le parole del codice relativo a blocchi di  $k-1$  simboli. Le rimanenti  $2^{k-1}$  righe si ottengono per riflessione speculare delle prime  $2^{k-1}$  righe e sostituzione del primo simbolo (pari a 0) con il simbolo 1. Più formalmente:

$$\beta_i^{(k)} = \begin{cases} (0, \beta_i^{(k-1)}) & i \in [1, 2^{k-1}] \\ (1, \beta_{2^{k-1}+1-i}^{(k-1)}) & i \in [2^{k-1}+1, 2^k] \end{cases} \quad (3.47)$$

Tav. 1.a Codice di Gray per  $k=2$ .

<i>Simbolo</i>	<i>Codice di Gray</i>
$\beta_1$	00
$\beta_2$	01
$\beta_3$	11
$\beta_4$	10

Tav. 1.b Codice di Gray per  $k=3$ .

<i>Simbolo</i>	<i>Codice di Gray</i>
$\beta_1$	000
$\beta_2$	001
$\beta_3$	011

$\beta_4$	010
$\beta_5$	110
$\beta_6$	111
$\beta_7$	101
$\beta_8$	100

Tav. 1.b Codice di Gray per  $k=4$ .

<i>Simbolo</i>	<i>Codice di Gray</i>
$\beta_1$	0000
$\beta_2$	0001
$\beta_3$	0011
$\beta_4$	0010
$\beta_5$	0110
$\beta_6$	0111
$\beta_7$	0101
$\beta_8$	0100
$\beta_9$	1100
$\beta_{10}$	1101
$\beta_{11}$	1111
$\beta_{12}$	1110
$\beta_{13}$	1010
$\beta_{14}$	1011
$\beta_{15}$	1001
$\beta_{16}$	1000

Si osservi ora che, in virtù della (3.45) si ha:

$$y^2 = 4R_T \frac{W_{d_T}}{f_b \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{N}_0(f) |H_R(f)|^2 df} \frac{3 \log_2 L}{2 L^2 - 1} \frac{g_0^2(0)}{G_T^2 \int_{-\infty}^{\infty} |H_T(f)|^2 df} . \quad (3.48)$$

Inoltre, nel caso in cui il rumore sia bianco, ovvero

$$\mathcal{N}_0(f) = \mathcal{N}_0 \quad (3.49)$$

la (3.48) diviene

$$y^2 = \frac{W_{d_T}}{f_b \frac{\mathcal{N}_0}{4R_R}} \frac{3 \log_2 L}{2} \frac{R_T}{L^2 - 1} \frac{g_0^2(0)}{G_T^2 \int_{-\infty}^{\infty} |H_T(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2 df} \quad (3.50)$$

La precedente relazione può essere posta in una forma più compatta come segue

$$y^2 = SNR_0 \frac{3 \log_2 L}{2} \frac{1}{L^2 - 1} \alpha^2 \quad (3.51)$$

In cui il termine

$$SNR_0 = \frac{W_{d_T}}{f_b \frac{\mathcal{N}_0}{4R_R}} \quad (3.52)$$

rappresenta il rapporto segnale rumore di riferimento Il fattore

$$\alpha^2 = \frac{R_T}{R_R} \frac{g_0^2(0)}{G_T^2 \int_{-\infty}^{\infty} |H_T(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2 df} \quad (3.53)$$

dipende dalla forma dei filtri di trasmissione e di ricezione.

Nel caso in cui il ricevitore sia affetto da rumore termico, il rapporto segnale rumore di riferimento  $SNR_0$  diviene

$$SNR_0 = \frac{W_{d_T}}{\frac{1}{2} k T_{e_i} f_b} \quad (3.54)$$

in cui

$$T_{e_i} = T_{G_i} + (F - 1) T_0 \quad (3.55)$$

essendo  $T_G$  la temperatura equivalente di rumore del sistema a monte del filtro di ricezione e  $F$  la figura di rumore del filtro di ricezione. Nel caso in cui  $T_G=T_0$ , la precedente relazione si semplifica ulteriormente. In particolare si ha

$$SNR_0 = \frac{W_{d_T}}{\frac{1}{2}kFT_0f_b} . \quad (3.56)$$

In relazione al fattore  $\alpha^2$  si osserva che essendo

$$G_0(f) = G_T H_T(f) H_C(f) H_R(f) \quad (3.57)$$

tale fattore può essere riscritto come segue

$$\alpha^2 = \frac{R_T}{R_R} \frac{g_0^2(0)}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|G_0(f)|^2}{|H_C(f)|^2 |H_R(f)|^2} df \int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2 df} . \quad (3.58)$$

### **Casi particolari - Ricevitore ottimo**

Il ricevitore ottimo è quello che corrisponde ha

$$\underset{H_R(f), H_T(f)}{Max} \frac{R_T}{R_R} \frac{g_0^2(0)}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|G_0(f)|^2}{|H_C(f)|^2 |H_R(f)|^2} df \int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2 df} \quad (3.59)$$

con il vincolo sulla massima potenza disponibile del trasmettitore.

Poiché per la disuguaglianza di Schwarz si ha che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \int_{-\infty}^{+\infty} |Y(f)|^2 df \geq \left| \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) Y^*(f) df \right|^2 \quad (3.60)$$

in cui l'eguaglianza vale solo se  $X(f)=\lambda Y(f)$ , osservando che nel caso in esame, posto

$$X(f) = \frac{|G_0(f)|}{|H_C(f)||H_R(f)|}, \quad Y(f) = |H_R(f)| \quad (3.61)$$

si ha

$$X(f)Y^*(f) = \frac{|G_0(f)|}{|H_C(f)|} \quad (3.62)$$

e che pertanto il corrispondente integrale che compare nella (3.60) è costante rispetto alle funzioni di trasferimento dei filtri di trasmissione e di ricezione, si ha che il denominatore è minimo per

$$|H_R(f)| = \lambda \frac{|G_0(f)|}{|H_C(f)||H_R(f)|} \quad (3.63)$$

ovvero per

$$|H_R(f)|^2 = \lambda \frac{|G_0(f)|}{|H_C(f)|}. \quad (3.64)$$

Di conseguenza il filtro di ricezione deve soddisfare la seguente condizione

$$|H_R(f)| = \sqrt{\lambda} \frac{|G_0(f)|^{1/2}}{|H_C(f)|^{1/2}}. \quad (3.65)$$

Dalla (20) si ha inoltre che il filtro di trasmissione ha una funzione di trasferimento pari ha

$$|H_T(f)| = \frac{|G_0(f)|^{1/2}}{G_T \sqrt{\lambda} |H_C(f)|^{1/2}} \quad (3.66)$$

In virtù della (23) si ha

$$\boxed{\alpha_{opt}^2 = \frac{R_T}{R_R} \frac{g_0^2(0)}{\left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|G_0(f)|}{|H_C(f)|} df \right|^2}} \quad (3.67)$$

Per i canali di trasmissione che presentano una funzione di trasferimento uniforme nella banda d'interesse, ovvero tali che

$$H_c(f) = b \quad (3.68)$$

la (3.67) diviene

$$\alpha_{opt}^2 = \frac{R_T}{R_R} b^2 = \frac{1}{A_{d_c}} \quad (3.69)$$

essendo

$$A_{d_c} = \frac{R_R}{R_T} \frac{1}{b^2} \quad (3.70)$$

l'attenuazione disponibile del canale di comunicazione.

### **Ricevitore subottimo**

Si consideri il caso in cui il filtro di ricezione provvede solo all'equalizzazione delle distorsioni introdotte dal canale, ovvero

$$H_T(f) = \frac{G_0(f)}{G_T} \quad (3.71)$$

$$H_R(f) = \frac{1}{H_C(f)} \quad (3.72)$$

In tal caso la (3.58) diviene

$$\alpha^2 = \frac{R_T}{R_R} \frac{g_0^2(0)}{\int_{-\infty}^{\infty} |G_0(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|H_C(f)|^2} df} \quad (3.73)$$

Nel caso in cui  $G_0(f)$  sia una funzione a coseno rialzato, poiché

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G_0(f)|^2 df = \left(1 - \frac{\gamma}{4}\right) \frac{1+\gamma}{2W} \quad (3.74)$$

si ha

$$\alpha^2 = \frac{R_T}{R_R} \frac{1}{\left(1 - \frac{\gamma}{4}\right) \frac{1+\gamma}{2W} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|H_C(f)|^2} df}. \quad (3.75)$$

Se, inoltre, la funzione di trasferimento del canale è uniforme nella banda d'interesse, ovvero se

$$H_c(f) = b \quad (3.76)$$

si ha

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{R_T}{R_R} \frac{1}{\left(1 - \frac{\gamma}{4}\right) \frac{1+\gamma}{2W} \frac{2W}{b^2}} \\ &= \frac{1}{\left(1 - \frac{\gamma}{4}\right) (1+\gamma)} \frac{1}{A_{dC}}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

## MODULAZIONE QAM

Quando la banda disponibile per un collegamento non è contigua all'origine, lo schema della modulazione ASK va modificato, introducendo a valle del filtro  $H_T(f)$  un modulatore (analogico) d'ampiezza. Nel caso di una modulazione a banda laterale doppia, quindi, l'informazione sul simbolo emesso dalla sorgente è veicolata tramite l'ampiezza della componente analogica di bassa frequenza in fase.

In effetti, nel caso in cui si impiegano segnali limitati in banda non contigua all'origine, l'informazione può essere veicolata tramite l'ampiezza e la fase istantanea dell'involuppo complesso. Pertanto mentre nella modulazione ASK per segnali limitati in banda contigua all'origine i vettori-segnale associati a ciascun simbolo dovevano appartenere all'intervallo unidimensionale  $[-A, A]$ , nel caso dei segnali limitati in banda non contigua all'origine i vettori-segnale possono essere disposti nel piano complesso.

Nel caso della modulazione Q.A.M. i vettori-segnale associati agli  $L$  simboli sono disposti ai vertici di un reticolo (vedi figura).

Come illustrato in figura, nella modulazione QAM il codificatore di trasmissione ed il separatore di flussi convertono la sequenza binaria prodotta dalla sorgente in due flussi di simboli  $v_c[n]$  e  $v_s[n]$  appartenenti ad un alfabeto composto da  $L_T$  caratteri corrispondenti a  $L_T$  livelli equispaziati nell'intervallo  $[-A, A]$ :

$$v_j = \frac{2A}{L_T - 1} j - A, \quad j = 0, 1, \dots, L_T - 1, \quad (3.78)$$

Indicando con  $f_b$  il ritmo binario della sorgente, il ritmo delle due sequenze codificate sarà

$$f_{L_T} = \frac{f_b}{2 \log_2 L_T} = \frac{f_b}{\log_2 L_T^2}. \quad (3.79)$$



All'uscita dei due filtri di trasmissione sono quindi presenti le due onde PAM

$$s_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_c[n] G_T h_T(t - nT_L) \quad (3.80)$$

$$s_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_s[n] G_T h_T(t - nT_L) \quad (3.81)$$

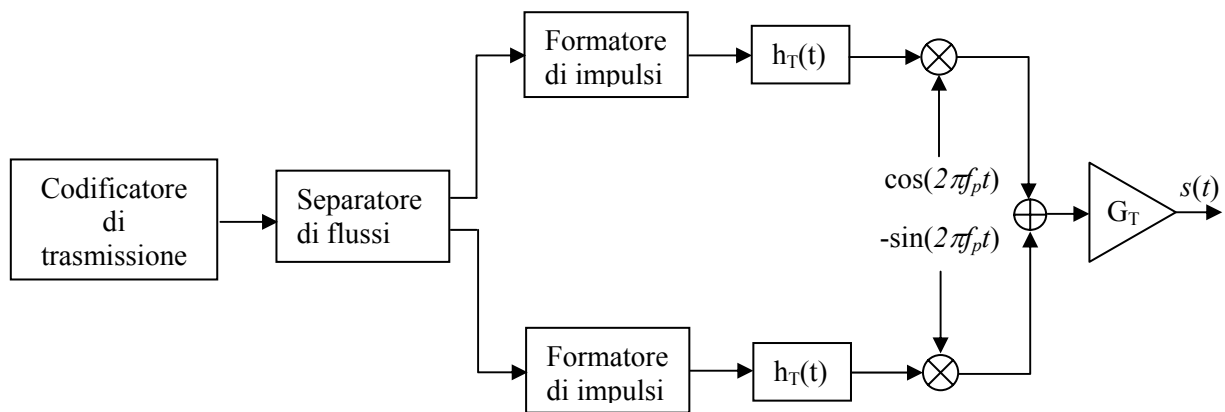


Fig6. Modulatore QAM

che modulano rispettivamente la componente in fase e la componente in quadratura del segnale trasmesso che pertanto è pari a:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_c[n] G_T h_T(t - nT_L) \cos(2\pi f_p t + \theta) + \\ - \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_s[n] G_T h_T(t - nT_L) \sin(2\pi f_p t + \theta)$$

Nel caso di assenza di interferenza intersimbolo, il ricevitore ottimo è l'estensione del ricevitore per trasmissione binaria ed è costituito, per ciascuno dei due canali fase e quadratura da un filtro seguito da un comparatore a soglia. Pertanto la probabilità di errore sul singolo carattere vale:

$$P_e = \left(1 - \frac{1}{L_T}\right) \text{erfc}(y) \quad (3.82)$$

essendo

$$y^2 = \frac{A^2 g_0^2(0)}{2(L_T - 1)^2 \int_{-\infty}^{\infty} 2\mathcal{N}_0^+(f + f_p) |H_R(f)|^2 df} . \quad (3.83)$$

D'altro canto, considerato che, essendo i simboli equiprobabili, si ha

$$\sigma_A^2 = \frac{A^2}{3} \frac{L_T + 1}{L_T - 1}, \quad (3.84)$$

per la potenza disponibile all'uscita del trasmettitore si ottiene

$$\begin{aligned} W_{d_T} &= \frac{1}{4R_T} \left[ \frac{1}{2} \frac{\sigma_A^2}{T_{L_T}} G_T^2 \int_{-\infty}^{\infty} |H_T(f)|^2 df + \frac{1}{2} \frac{\sigma_A^2}{T_{L_T}} G_T^2 \int_{-\infty}^{\infty} |H_T(f)|^2 df \right] \\ &= \frac{1}{4R_T} \frac{A^2}{3} \frac{L_T + 1}{L_T - 1} \frac{1}{T_{L_T}} G_T^2 \int_{-\infty}^{\infty} |H_T(f)|^2 df \end{aligned} \quad (3.85)$$

Di conseguenza

$$A^2 = 4R_T W_{d_T} 3 \frac{L_T - 1}{L_T + 1} \frac{1}{f_{L_T}} \frac{1}{G_T^2 \int_{-\infty}^{\infty} |H_T(f)|^2 df} \quad (3.86)$$

pertanto si ottiene

$$y^2 = 4R_T \frac{W_{d_T}}{f_b \int_{-\infty}^{\infty} 2\mathcal{N}_0^+(f + f_p) |H_R(f)|^2 df} \frac{3 \log_2 L_T}{2 L^2 - 1} \frac{g_0^2(0)}{G_T^2 \int_{-\infty}^{\infty} |H_T(f)|^2 df} \quad (3.87)$$

nel caso in cui il rumore sia bianco, ovvero

$$\mathcal{N}_0(f) = \mathcal{N}_0 \quad (3.88)$$

la (3.48) diviene

$$y^2 = \frac{W_{d_T}}{f_b} \frac{\frac{\mathcal{N}_0}{4R_R}}{\frac{3 \log_2 L_T^2}{L_T^2 - 1} \frac{R_T}{R_R}} \frac{g_0^2(0)}{G_T^2 \int_{-\infty}^{\infty} |H_T(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2 df} \quad (3.89)$$

la precedente relazione può essere posta in una forma più compatta ponendo

$$SNR_0 = \frac{W_{d_T}}{f_b \frac{\mathcal{N}_0}{4R_R}} \quad (3.90)$$

$$\alpha^2 = \frac{R_T}{R_R} \frac{g_0^2(0)}{G_T^2 \int_{-\infty}^{\infty} |H_T(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2 df} \quad (3.91)$$

cosicch  si ha

$$\begin{aligned} y^2 &= SNR_0 \frac{3 \log_2 L_T^2}{4 \frac{L_T^2}{L_T^2 - 1}} \alpha^2 \\ &= SNR_0 \frac{3 \log_2 L}{4 \frac{L}{L - 1}} \alpha^2 \end{aligned} \quad (3.92)$$

Nel caso in cui il ricevitore sia affetto da rumore termico si ha

$$SNR_0 = \frac{W_{d_T}}{\frac{1}{2} k T_{e_i} f_b} \quad (3.93)$$

in cui

$$T_{e_i} = T_{G_i} + (F - 1) T_0 \quad (3.94)$$

essendo  $T_G$  la temperatura equivalente di rumore del sistema a monte del filtro di ricezione e  $F$  la figura di rumore del filtro di ricezione. Nel caso in cui  $T_G = T_0$ , la precedente relazione si semplifica ulteriormente. In particolare si ha

$$SNR_0 = \frac{W_{d_T}}{\frac{1}{2}kFT_0f_b} . \quad (3.95)$$

In relazione al fattore  $\alpha^2$  si osserva che essendo

$$G_0(f) = G_T H_T(f) H_C^+(f + f_p) H_R(f) \quad (3.96)$$

tale fattore può essere riscritto come segue

$$\alpha^2 = \frac{R_T}{R_R} \frac{g_0^2(0)}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|G_0(f)|^2}{|H_C^+(f + f_p)|^2 |H_R(f)|^2} df \int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2 df} . \quad (3.97)$$

**MODULAZIONE PSK**

Nella modulazione PSK la fase istantanea è costituita da un'onda PAM ad impulsi rettangolari di durata pari all'intervallo di simbolo

$$\alpha(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi[n] \text{rect}_{T_L}(t - nT_L) \quad (3.98)$$

I simboli  $[n]$  appartengono ad un alfabeto composto da  $L_T$  caratteri corrispondenti, a meno di una fase arbitraria  $\Phi$ , a  $L_T$  livelli equispaziati nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$ :

$$\varphi_j = \frac{2\pi}{L_T} j + \Phi, \quad j = 0, 1, \dots, L_T - 1, \quad (3.99)$$

il segnale  $s(t)$  trasmesso è quindi del tipo:

$$\begin{aligned} s(t) = & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(\varphi[n]) A G_T h_T(t - nT_L) \cos(2\pi f_p t + \theta) + \\ & - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sin(\varphi[n]) A G_T h_T(t - nT_L) \sin(2\pi f_p t + \theta) \end{aligned} \quad (3.100)$$

con

$$h_T(t) = \text{rect}_{T_L}(t) \quad (3.101)$$

L'ampiezza istantanea della componente utile, all'ingresso del decisore vale

$$Ag(0) \quad (3.102)$$

Per il calcolo delle prestazioni del ricevitore, con riferimento allo schema di Fig.4, si ha che

$$m_{z/H_j} = \text{tg}[\varphi_i] \quad (3.103)$$

$$\sigma_{z/H_j}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{N}_0(f) |H_R(f)|^2 df \quad (3.104)$$

per la probabilità d'errore sul singolo simbolo si ha

$$P_e = \begin{cases} \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(y) & L = 2 \\ \operatorname{erfc}(y) & L > 2 \end{cases} \quad (3.105)$$

essendo

$$y^2 = \frac{A^2 g^2(0)}{2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{N}(f) |H_R(f)|^2 df} \sin^2 \left( \frac{\pi}{L} \right). \quad (3.106)$$

Al fine di esprimere le prestazioni del sistema PSK in funzione della potenza disponibile del trasmettitore e del fattore di rumore del ricevitore, si osserva che, la potenza disponibile all'uscita del trasmettitore è pari a

$$\begin{aligned} W_{d_T} &= \frac{1}{4R_T} \frac{A^2}{2} \frac{E \{ \cos^2(\varphi[n]) + \sin^2(\varphi[n]) \}}{T_L} G_T^2 \int_{-\infty}^{\infty} |H_T(f)|^2 df = \\ &= \frac{1}{4R_T} \frac{A^2}{2} \frac{1}{T_L} G_T^2 \int_{-\infty}^{\infty} |H_T(f)|^2 df \end{aligned} \quad (3.107)$$

Di conseguenza

$$A^2 = 4R_T W_{d_T} 2 \frac{1}{f_L} \frac{1}{G_T^2 \int_{-\infty}^{\infty} |H_T(f)|^2 df} \quad (3.108)$$

Pertanto, osservando che

$$f_L = \frac{f_b}{\log_2 L} \quad (3.109)$$

si ottiene

$$y^2 = 4R_T \frac{2W_{d_T}}{f_b \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{N}(f) |H_R(f)|^2 df} \frac{1}{2} \sin^2 \left( \frac{\pi}{L} \right) \log_2(L) \frac{g^2(0)}{G_T^2 \int_{-\infty}^{\infty} |H_T(f)|^2 df}. \quad (3.110)$$

Si osservi che i due canali del ricevitore sono affetti dalle componenti analogiche di bassa frequenza del rumore, rispettivamente in fase ed in quadratura, il cui spettro di densità di potenza è pari a

$$\mathcal{N}(f) = \mathcal{N}_c(f) = \mathcal{N}_s(f) = 2\mathcal{N}_0^+(f + f_p) = 2\mathcal{N}_0 \quad (3.111)$$

Pertanto, la (3.110) diviene

$$y^2 = \frac{2W_{dT}}{f_b \frac{2\mathcal{N}_0}{4R_R}} \frac{1}{2} \sin^2\left(\frac{\pi}{L}\right) \log_2(L) \frac{R_T}{R_R} \frac{g^2(0)}{G_T^2 \int_{-\infty}^{\infty} |H_T(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2 df} \quad (3.112)$$

la precedente relazione può essere posta in una forma più compatta ponendo

$$SNR_0 = \frac{W_{dT}}{f_b \frac{\mathcal{N}_0}{4R_R}} \quad (3.113)$$

$$\alpha^2 = \frac{R_T}{R_R} \frac{[g(0)]^2}{G_T^2 \int_{-\infty}^{\infty} |H_T(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2 df} \quad (3.114)$$

cosicché si ha

$$y^2 = SNR_0 \frac{1}{2} \sin^2\left(\frac{\pi}{L}\right) \log_2(L) \alpha^2 \quad (3.115)$$

Nel caso in cui il ricevitore sia affetto da rumore termico si ha

$$SNR_0 = \frac{W_{dT}}{\frac{1}{2} kT_{e_i} f_b} \quad (3.116)$$

in cui

$$T_{e_i} = T_{G_i} + (F-1)T_0 \quad (3.117)$$

essendo  $T_G$  la temperatura equivalente di rumore del sistema a monte del filtro di ricezione e  $F$  la figura di rumore del filtro di ricezione. Nel caso in cui  $T_G=T_0$ , la precedente relazione si semplifica ulteriormente. In particolare si ha

$$SNR_0 = \frac{W_{dT}}{\frac{1}{2} kFT_0 f_b} . \quad (3.118)$$

In relazione al fattore  $\alpha^2$  si osserva che essendo

$$G_0(f) = G_T H_T(f) H_C^+(f + f_p) H_R(f) \quad (3.119)$$

tale fattore può essere riscritto come segue

$$\alpha^2 = \frac{R_T}{R_R} \frac{[g(0)]^2}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|G_0(f)|^2}{|H_C^+(f + f_p)|^2 |H_R(f)|^2} df \int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2 df} . \quad (3.120)$$

### Modulazione OQPSK

Nella modulazione *Quaternary PSK* (QPSK) la fase della portante cambia ogni  $T_L$  secondi. Poiché usualmente il segnale QPSK è successivamente limitato in banda da un filtro passabanda al fine della prevenzione delle interferenze tra canali adiacenti, le variazioni di fase di  $180^\circ$  che possono presentarsi in una data realizzazione, inducono una temporanea diminuzione dell'involuppo, che non si mantiene pertanto costante, come desiderato.

Nella modulazione *Offset Quaternary PSK* (OQPSK) il canale in quadratura è ritardato rispetto a quello in fase per un intervallo pari a  $T_L/2$ . Pertanto la forma d'onda trasmessa è pari a

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(\varphi[n]) A G_T h_T(t - nT_L) \cos(2\pi f_p t + \theta) + \\ - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sin(\varphi[n]) A G_T h_T\left(t - nT_L - \frac{T_L}{2}\right) \sin(2\pi f_p t + \theta) \quad (3.121)$$

In tal modo si elimina la possibilità di cambiamenti di fase di  $180^\circ$ .

### Modulazione MSK

Questo tipo di modulazione si ottiene dalla modulazione OQPSK, impiegando al posto di un impulso di forma rettangolare, un impulso di forma cosinusoidale, ovvero scegliendo

$$h_T(t) = \cos\left[\frac{\pi}{T_L}\left(t - \frac{T_L}{2}\right)\right] \text{rect}_{T_L}\left(t - \frac{T_L}{2}\right). \quad (3.122)$$

Pertanto la forma d'onda trasmessa diviene



$$\begin{aligned}
 s(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(\varphi[n]) A G_T \cos\left[\frac{\pi}{T_L}\left(t - nT_L - \frac{T_L}{2}\right)\right] \text{rect}_{T_L}\left(t - nT_L - \frac{T_L}{2}\right) \cos(2\pi f_p t + \theta) + \\
 &\quad - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sin(\varphi[n]) A G_T \cos\left[\frac{\pi}{T_L}(t - nT_L - T_L)\right] \text{rect}_{T_L}(t - nT_L - T_L) \sin(2\pi f_p t + \theta) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(\varphi[n]) A G_T \sin\left[\frac{\pi}{T_L}(t - nT_L)\right] \text{rect}_{T_L}\left(t - nT_L - \frac{T_L}{2}\right) \cos(2\pi f_p t + \theta) + \\
 &\quad + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sin(\varphi[n]) A G_T \cos\left[\frac{\pi}{T_L}(t - nT_L)\right] \text{rect}_{T_L}(t - nT_L - T_L) \sin(2\pi f_p t + \theta) \\
 &= A G_T \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \cos(\varphi[n]) \text{rect}_{T_L}\left(t - nT_L - \frac{T_L}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi t}{T_L}\right) \cos(2\pi f_p t + \theta) + \\
 &\quad + A G_T \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \sin(\varphi[n]) \text{rect}_{T_L}(t - nT_L - T_L) \cos\left(\frac{\pi t}{T_L}\right) \sin(2\pi f_p t + \theta)
 \end{aligned} \tag{3.123}$$

Poiché per il caso quaternario si ha

$$\cos(\varphi_n) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin(\varphi_n) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

la forma d'onda trasmessa può essere scritta nella forma seguente

$$\begin{aligned}
 s(t) &= A G_T \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \cos(\varphi[n]) \left\{ \text{rect}_{\frac{T_L}{2}}\left(t - nT_L - \frac{T_L}{4}\right) \times \right. \\
 &\quad \times \left\{ \sin\left(\frac{\pi t}{T_L}\right) \cos(2\pi f_p t + \theta) - \frac{\sin(\varphi[n-1])}{\cos(\varphi[n])} \cos\left(\frac{\pi t}{T_L}\right) \sin(2\pi f_p t + \theta) \right\} + \\
 &\quad \left. + \text{rect}_{\frac{T_L}{2}}\left(t - nT_L - \frac{3T_L}{4}\right) \left\{ \sin\left(\frac{\pi t}{T_L}\right) \cos(2\pi f_p t + \theta) + \frac{\sin(\varphi[n])}{\cos(\varphi[n])} \cos\left(\frac{\pi t}{T_L}\right) \sin(2\pi f_p t + \theta) \right\} \right\}
 \end{aligned}$$

posto infine

$$\xi_n = \frac{\sin(\varphi[n])}{\cos(\varphi[n])}, \quad \eta_n = \frac{\sin(\varphi[n-1])}{\cos(\varphi[n])}$$

si ha

$$s(t) = A G_T \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \cos(\varphi[n]) \left\{ \text{rect}_{\frac{T_L}{2}} \left( t - nT_L - \frac{T_L}{4} \right) \sin \left( 2\pi f_p t - \eta_n \frac{\pi t}{T_L} + \theta \right) + \text{rect}_{\frac{T_L}{2}} \left( t - nT_L - \frac{3T_L}{4} \right) \sin \left( 2\pi f_p t + \xi_n \frac{\pi t}{T_L} + \theta \right) \right\} \quad (3.124)$$

Pertanto la modulazione MSK può anche essere interpretata come una modulazione di frequenza in quanto, in un intervallo di durata pari a  $T_L/2$  la frequenza istantanea assume uno dei due valori

$$f_1 = f_p - \frac{1}{2T_L} \quad (3.125)$$

$$f_2 = f_p + \frac{1}{2T_L} \quad (3.126)$$

È possibile dimostrare che la separazione tra le due frequenze

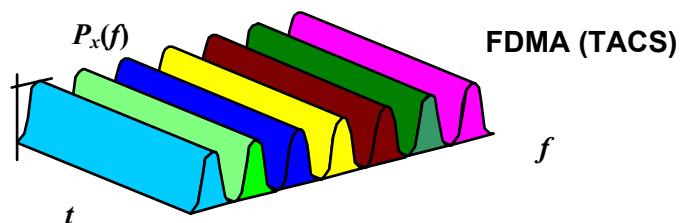
$$\Delta f = \frac{1}{T_L} \quad (3.127)$$

è la minima che garantisce l'ortogonalità tra impulsi rettangolari modulati di durata  $T_L/2$ . da tale proprietà discende il nome di questa forma di modulazione, indicata in letteratura come *Minimum Shift Keying*.

## *Multiplazione CDMA*

Dato un canale di comunicazione, con il termine *multiplazione* (e demultiplazione) si intende l'operazione che consente di trasmettere più flussi informativi prodotti da diverse sorgenti, dette tributarie, per mezzo dello stesso sistema trasmissivo, garantendone la separabilità in ricezione. Le tecniche di multiplazione comprendono:

1. ***Tecniche a divisione di spazio:*** ad ogni flusso informativo è assegnato un singolo portante fisico (es. doppino telefonico).
2. ***Tecniche a divisione di frequenza (Frequency Division Multiple Access):*** l'occupazione del canale multiplato da parte di un flusso informativo (o di un raggruppamento di flussi), avente origine da una sorgente tributaria avviene in una banda di frequenze (all'interno della banda passante del canale multiplato) che è disgiunta rispetto alle bande di frequenze utilizzate dagli RCB emessi da altre sorgenti tributarie.



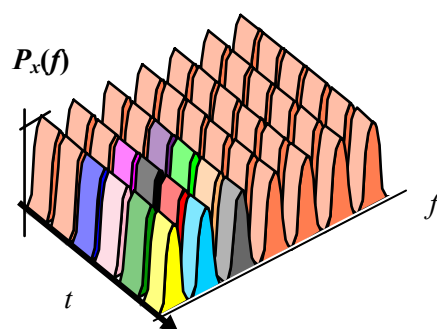
---

### La multiplazione

---

3. **Tecniche a divisione di tempo (Time Division Multiple Access):** l'occupazione del canale multiplato da parte di un flusso informativo (o di un raggruppamento di flussi) avente origine da una sorgente tributaria avviene in intervalli di tempo che non si sovrappongono con quelli riguardanti i flussi emessi da altre sorgenti tributarie (es.: multiplazione PCM, numerica asincrona e sincrona)
4. **Tecniche miste FDM-TDM:** combinano la tecnica d'accesso *FDMA*, con la tecnica *TDMA*. La porzione disponibile dello spettro è prima divisa in sottobande (canali) ed all'interno di ciascun canale, viene creata un'ulteriore suddivisione temporale della risorsa. Nel sistema GSM, ad esempio, la porzione di banda assegnata ad un operatore è suddivisa in sottobande di 200 kHz. Ciascuna sottobanda è quindi impiegata per il trasporto di otto flussi informativi. Ciascuna delle otto sorgenti tributarie ha infatti a disposizione l'intera sottobanda per un intervallo di tempo di 0.577 ms (time slot) ogni 4,615 ms (durata della trama TDMA pari in questo caso a 8 timeslot).

#### FDMA-TDMA (GSM)



5. **Tecniche a divisione di codice (Code Division Multiple Access):** sono anche note come tecniche di multiplazione ad espansione dello spettro (tecniche spread-spectrum). Nate inizialmente per applicazioni militari,

sono ora molto diffusa nelle reti radiomobili (ad es. UMTS). Esse consistono nel trasmettere simultaneamente e nella stessa banda di frequenza un insieme di  $N$  segnali, uno per ciascun flusso informativo,

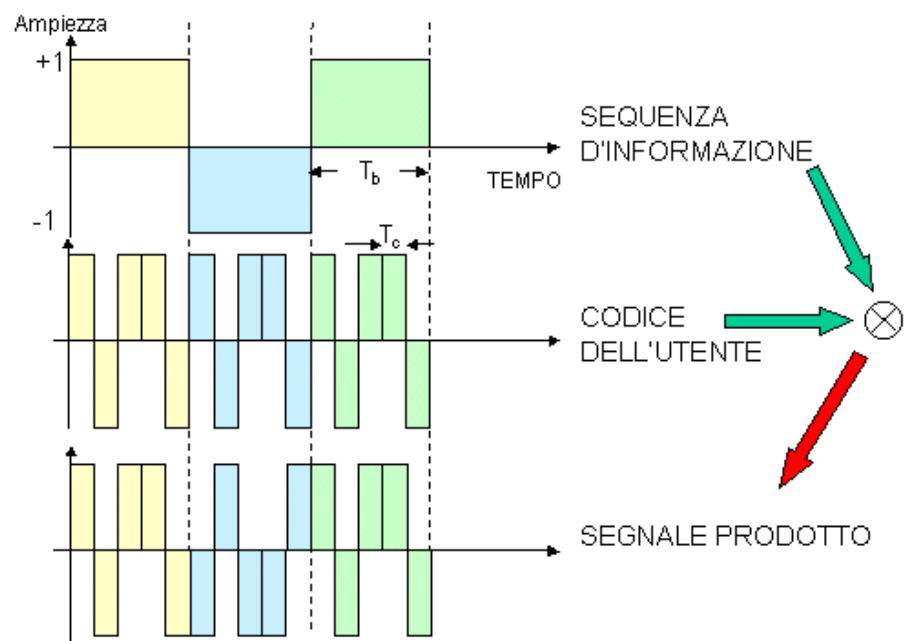
- o moltiplicando ciascun segnale per una sequenza di codice, scelta tra un insieme di sequenze (pseudo)ortogonali (DS, Direct Sequence)
- o cambiando velocemente la frequenza portante più volte in ogni tempo di simbolo secondo una sequenza prestabilita e diversa per ciascun segnale (FH, Frequency Hopping)

Si parla di trasmissione a spettro espanso quando la banda impiegata dal sistema trasmissivo è molto maggiore (almeno un ordine di grandezza) rispetto alla banda di Nyquist del segnale utile.

Quindi a differenza delle altre tecniche di multiplazione, nella tecnica CDMA tutti gli utenti trasmettono **su tutta la banda nello stesso istante**. In ricezione, la separabilità tra i singoli segnali è basata sull'impiego da parte di ciascun utente di un proprio "codice" per il quale viene moltiplicata in trasmissione l'informazione d'utente (operazione di espansione dello spettro o "spreading"). Se i codici impiegati sono ortogonali tra loro, il ricevitore è in grado di isolare e ricostruire nuovamente i flussi informativi dei diversi utenti, con operazioni semplici. A causa del rumore, delle distorsioni introdotte nel canale di propagazione e delle proprietà non ideali dei codici, il numero massimo di segnali che si possono sovrapporre è limitato.

## DS-CDMA

Con riferimento alla figura seguente, nell'operazione di espansione, la sequenza d'informazione con intervallo di ripetizione dei simboli  $T_b$  viene modulata sui livelli antipodali  $+1$  e  $-1$  e moltiplicata per una sequenza binaria con valori  $\{-1, 1\}$ , con intervallo di ripetizione  $T_c$  (detto intervallo di chip) tra i simboli elementari detti chip.



**Fig. 1. Modulazione DS-SS**

L'operazione di ricostruzione prevede, che la sequenza ricevuta venga moltiplicata chip a chip, per lo stesso codice usato nel processo di espansione. Mediando sul periodo di bit e campionando si ricostruisce in questo caso esattamente la sequenza d'informazione.

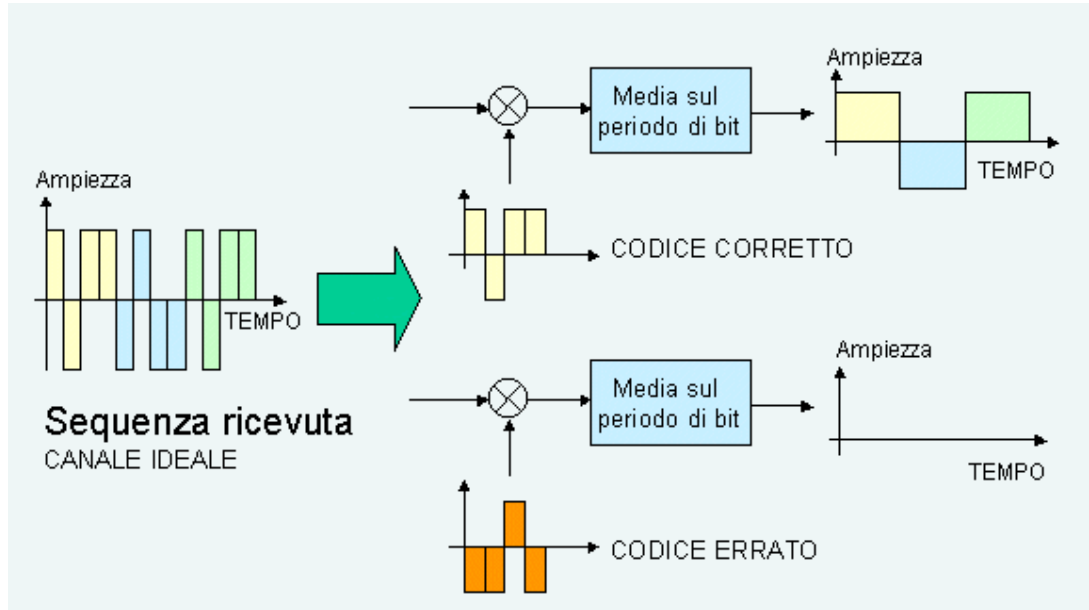


Fig. 2. Demultiplazione e demodulazione DS-CDMA

Nella modulazione DS-CDMA il segnale relativo al canale  $i$ -esimo è pari a

$$s^{(i)}(t) = \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{(i)}[n] \text{rect}_{T_b}(t - nT_b) \right] g^{(i)}(t) \quad (4.1)$$

in cui il segnale di espansione vale

$$g^{(i)}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c^{(i)}[k] \text{rect}_{T_c}(t - kT_c) \quad (4.2)$$

con il vincolo

$$T_b = M T_c, \quad (4.3)$$

essendo  $M$  il *fattore di espansione* dello spettro (spreading factor) e  $T_c$  l'intervallo di chip. Sia i simboli  $\{a^{(i)}[n]\}$  che i simboli  $\{c^{(i)}[m]\}$  assumono valori appartenenti all'alfabeto binario  $\{-1, 1\}$ .

Si osservi che il segnale  $s^{(i)}(t)$  può essere riscritto come segue.

$$s^{(i)}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{(i)}[n] \sum_{m=0}^{M-1} c^{(i)}[nM + m] \text{rect}_{T_c}[t - (nM + m)T_c]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{(i)}[n]g_n^{(i)}(t) \quad (4.4)$$

avendo posto

$$g_n^{(i)}(t) = \sum_{m=0}^{M-1} c^{(i)}[nM+m] \text{rect}_{T_c} [t - (nM+m)T_c] \quad (4.5)$$

### Caso sincrono

Il caso sincrono si presenta quando i segnali relativi ai singoli utenti presentano gli stessi ritardi. Questa situazione è tipica delle comunicazioni relative alla tratta dalla stazione base ai terminali mobili.

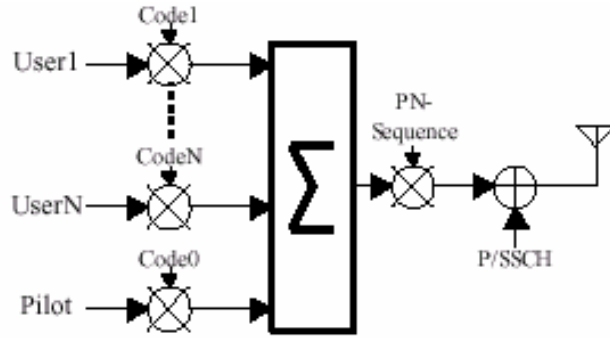


Fig. 3. – Multiplazione CDMA nella tratta da stazione base a terminale mobile in UMTS

In presenza di  $N$  utenti attivi, ciascuno utilizzando il canale associato ad un predeterminato codice, il segnale ricevuto sarà pari a

$$r(t) = \sum_{k=1}^N s^{(k)}(t) + n(t) \quad (4.6)$$

Di conseguenza, il segnale a valle del campionatore relativo al ricevitore  $i$ -esimo vale:

$$z^{(i)}[n] = \langle r(t), g_n^{(i)}(t) \rangle$$

$$= \left\langle s^{(i)}(t) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N s^{(k)}(t) + n(t), g_n^{(i)}(t) \right\rangle$$



$$= \langle s^{(i)}(t), g_n^{(i)}(t) \rangle + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N a^{(k)}[n] \langle g_n^{(k)}(t), g_n^{(i)}(t) \rangle + \langle n(t), g_n^{(i)}(t) \rangle$$

Se, come accade di norma, i codici usati sono tra loro ortogonali si ha

$$z^{(i)}[n] = \langle r(t), g_n^{(i)}(t) \rangle = \langle s^{(i)}(t), g_n^{(i)}(t) \rangle + \langle n(t), g_n^{(i)}(t) \rangle \quad (4.7)$$

Conseguentemente le prestazioni del ricevitore coincidono con quelle di un sistema BPSK.

### Caso asincrono

Il caso asincrono si presenta tipicamente quando i segnali relativi ai singoli utenti presentano ritardi diversi. Questa situazione è tipica della tratta da terminali mobili a stazione base.

In presenza di N utenti attivi, ciascuno utilizzante il canale associato ad un predeterminato codice, il segnale ricevuto dal ricevitore i-esimo sarà pari a

$$r(t) = s^{(i)}(t) + \sum_{\substack{k=1, \\ k \neq i}}^N s^{(k)}(t - \Delta t_k) + n(t) \quad (4.8)$$

essendo  $\Delta t_k$  l'errore di sincronismo tra il segnale di interesse e quello dei segnali interferenti.

Nel seguito verrà esaminato il caso semplice in cui gli errori di sincronismo siano multipli interi della durata del chip, ovvero  $\Delta t_k = \Delta m_k T_c$

Di conseguenza, il segnale a valle del campionatore relativo al ricevitore i-esimo vale:

$$z^{(i)}[n] = \langle r(t), g_n^{(i)}(t) \rangle$$

$$\begin{aligned}
 &= \left\langle s^{(i)}(t) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N s^{(k)}(t - \Delta t_k) + n(t), g_n^{(i)}(t) \right\rangle \\
 &= \left\langle s^{(i)}(t), g_n^{(i)}(t) \right\rangle + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \left\langle s^{(k)}(t - \Delta t_k), g_n^{(i)}(t) \right\rangle + \left\langle n(t), g_n^{(i)}(t) \right\rangle \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

pertanto

$$\begin{aligned}
 m_{z^{(i)} / H_{-1}} &= E \left\{ \left\langle s^{(i)}(t), g_n^{(i)}(t) \right\rangle / H_{-1} \right\} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N E \left\{ \left\langle s^{(k)}(t - \Delta t_k), g_n^{(i)}(t) \right\rangle / H_{-1} \right\} \\
 &\quad + \left\langle E \{ n(t) / H_{-1} \}, g_n^{(i)}(t) \right\rangle \\
 &= - \left\langle g_n^{(i)}(t), g_n^{(i)}(t) \right\rangle + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \sum_{n'=-\infty}^{\infty} E \left\{ a^{(k)}[n'] \left\langle g_{n'}^{(k)}(t - \Delta t_k), g_n^{(i)}(t) \right\rangle \right\} \quad (4.10)
 \end{aligned}$$

Si osservi che

$$\begin{aligned}
 \left\langle g_n^{(i)}(t), g_n^{(i)}(t) \right\rangle &= \sum_{m=0}^{M-1} |c[nM + m]|^2 \mathcal{E}_c \\
 &= M \mathcal{E}_c = \mathcal{E}_b \quad (4.11)
 \end{aligned}$$

Pertanto, poiché in genere i flussi informativi emessi dai singoli utenti sono modellabili come realizzazioni di processi mutuamente statisticamente indipendenti, indipendenti anche dai codici utilizzati, a valor atteso nullo, si ha:

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \sum_{n'=-\infty}^{\infty} E \left\{ a^{(k)}[n'] \left\langle g_{n'}^{(k)}(t - \Delta t_k), g_n^{(i)}(t) \right\rangle \right\} &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \sum_{n'=-\infty}^{\infty} E \left\{ a^{(k)}[n'] \right\} E \left\{ \left\langle g_{n'}^{(k)}(t - \Delta t_k), g_n^{(i)}(t) \right\rangle \right\} \\
 &= 0 \quad (4.12)
 \end{aligned}$$

e quindi

$$m_{z^{(i)} / H_{-1}} = -M \mathcal{E}_c \quad (4.13)$$

Analogamente si dimostra che

$$m_{z^{(i)} / H_{+1}} = +M \mathcal{E}_c \quad (4.14)$$

Inoltre, nell'ipotesi in cui il rumore del ricevitore ed i segnali emessi dai vari utenti sui vari canali siano realizzazioni di processi ergodici mutuamente statisticamente indipendenti, si ha

$$\sigma_{z^{(i)}/H_{-1}}^2 = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N E \left\{ \left| \left\langle s^{(k)}(t - \Delta t_k), g_n^{(i)}(t) \right\rangle \right|^2 / H_{-1} \right\} + E \left\{ \left| \left\langle n(t), g_n^{(i)}(t) \right\rangle \right|^2 / H_{-1} \right\} \quad (4.15)$$

Nel seguito verrà esaminato il caso semplice in cui gli errori di sincronismo siano multipli interi della durata del chip, ovvero  $\Delta t_k = \Delta m_k T_c$ .

Posto

$$\Delta t_k = \Delta n_k T_b + \Delta m_k T_c = (M \Delta n_k + \Delta m_k) T_c$$

e

$$n'_k = n - \Delta n_k$$

si ha

$$\begin{aligned} & \left\langle s^{(k)}(t - \Delta t_k), g_n^{(i)}(t) \right\rangle = \\ & = a^{(k)} [n'_k - 1] \sum_{m_1=0}^{\Delta m_k - 1} c^{(k)} [n'_k M + m_1 - \Delta m_k] c^{(i)} [nM + m_1] \times \\ & \quad \times < rect_{T_c} [t - ((n - \Delta n_k)M + (m_1 - \Delta m_k)) T_c], rect_{T_c} [t - (nM + m_1) T_c] > \\ & \quad + a^{(k)} [n'_k] \sum_{m_2=\Delta m_k}^{M-1} c^{(k)} [n'_k M + m_2 - \Delta m_k] c^{(i)} [nM + m_2] \times \\ & \quad \times < rect_{T_c} [t - ((n - \Delta n_k)M + (m_2 - \Delta m_k)) T_c], rect_{T_c} [t - (nM + m_2) T_c] > = \\ & = a^{(k)} [n'_k - 1] \sum_{m_1=0}^{\Delta m_k - 1} c^{(k)} [n'_k M + m_1 - \Delta m_k] c^{(i)} [nM + m_1] \mathcal{E}_c \end{aligned}$$

$$+a^{(k)}[n'_k] \sum_{m_2=\Delta m_k}^{M-1} c^{(k)}[n'_k M + m_2 - \Delta m_k] c^{(i)}[nM + m_2] \mathcal{E}_c^e \quad (4.16)$$

Poiché:

$$\begin{aligned} E \left\{ \left| \left\langle s^{(k)}(t - \Delta t_k), g_n^{(i)}(t) \right\rangle \right|^2 / H_{-1} \right\} = \\ E \left\{ \left| a^{(k)}[n'_k - 1] \right|^2 \left| \sum_{m_1=0}^{\Delta m_k - 1} c^{(k)}[n'_k M + m_1 - \Delta m_k] c^{(i)}[nM + m_1] \right|^2 \right\} \mathcal{E}_c^2 + \\ + E \left\{ \left| a^{(k)}[n'_k] \right|^2 \left| \sum_{m_2=\Delta m_k}^{M-1} c^{(k)}[n'_k M + m_2 - \Delta m_k] c^{(i)}[nM + m_2] \right|^2 \right\} \mathcal{E}_c^2 \\ + 2E \left\{ a^{(k)}[n' - 1] a^{(k)}[n'] \left( \sum_{m_1=0}^{\Delta m_k - 1} c^{(k)}[n'_k M + m_1 - \Delta m_k] c^{(i)}[nM + m_1] \right) \right. \\ \left. \left( \sum_{m_2=\Delta m_k}^{M-1} c^{(k)}[n'_k M + m_2 - \Delta m_k] c^{(i)}[nM + m_2] \right) \right\} \mathcal{E}_c^2 \quad (4.17) \end{aligned}$$

Pertanto, nel caso in cui il messaggio sia costituito da una sequenza bianca (incorrelata), si ha

$$\begin{aligned} E \left\{ \left| \left\langle s^{(k)}(t - \Delta t_k), g_n^{(i)}(t) \right\rangle \right|^2 / H_{-1} \right\} = \\ = E \left\{ \left| \sum_{m_1=0}^{\Delta m_k - 1} c^{(k)}[n'_k M + m_1 - \Delta m_k] c^{(i)}[nM + m_1] \right|^2 \right\} \mathcal{E}_c^2 + \\ + E \left\{ \left| \sum_{m_2=\Delta m_k}^{M-1} c^{(k)}[n'_k M + m_2 - \Delta m_k] c^{(i)}[nM + m_2] \right|^2 \right\} \mathcal{E}_c^2 \\ = E \left\{ \left| \sum_{m_1=0}^{M-1} c^{(k)}[n'_k M + m_1 - \Delta m_k] c^{(i)}[nM + m_1] \right|^2 \right\} \mathcal{E}_c^2 \quad (4.18) \end{aligned}$$

Pertanto, nel caso di sequenze di codice mutuamente indipendenti si ha:

$$\begin{aligned}
 & E \left\{ \left| \left\langle s^{(k)}(t - \Delta t_k), g_n^{(i)}(t) \right\rangle \right|^2 / H_{-1} \right\} = \\
 & = \mathcal{E}_c^2 \sum_{m_1=0}^{M-1} \sum_{m_1'=0}^{M-1} E \left\{ c^{(k)}[n_k' M + m_1 - \Delta m_k] c^{(k)}[n_k' M + m_1' - \Delta m_k] \right\} E \left\{ c^{(i)}[nM + m_1] c^{(i)}[nM + m_1'] \right\} + \\
 & \hspace{25em} (4.19)
 \end{aligned}$$

posto

$$\mu_{c^{(k)}}^{(1,1)}[n] = E \left\{ c^{(k)}[k] c^{(k)}[k+n] \right\} \quad (4.20)$$

si ottiene

$$E \left\{ \left| \left\langle s^{(k)}(t - \Delta t_k), g_n^{(i)}(t) \right\rangle \right|^2 / H_{-1} \right\} = \mathcal{E}_c^2 \sum_{m_1=0}^{M-1} \sum_{m_1'=0}^{M-1} \mu_{c^{(k)}}^{(1,1)}[m_1' - m_1] \mu_{c^{(i)}}^{(1,1)}[m_1' - m_1] \quad (4.21)$$

Pertanto per sequenze di codice bianche, ovvero tali che

$$\mu_{c^{(k)}}^{(1,1)}[n] = u_o[n] \quad (4.22)$$

si ha che

$$E \left\{ \left| \left\langle s^{(k)}(t - \Delta t_k), g_n^{(i)}(t) \right\rangle \right|^2 / H_{-1} \right\} = M \mathcal{E}_c^2$$

Conseguentemente

$$\sigma_{z^{(i)}/H_{-1}}^2 = (N-1)M \mathcal{E}_c^2 + M \mathcal{E}_c^2 \sigma_N^2. \quad (4.23)$$

Analogamente si dimostra che

$$\sigma_{z^{(i)}/H_{+1}}^2 = (N-1)M \mathcal{E}_c^2 + M \mathcal{E}_c^2 \sigma_N^2. \quad (4.24)$$

per la probabilità d'errore sul singolo simbolo si ha

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(y) \quad (4.25)$$

essendo

$$y^2 = \frac{M^2 \mathcal{E}_c^2}{2(N-1)M \mathcal{E}_c^2 + 2M \mathcal{E}_c^2 \sigma_N^2}$$

$$= \frac{M}{2(N-1) + 2 \frac{\sigma_N^2}{\mathcal{E}_c}}$$

per alti rapporti segnale rumore la precedente relazione può essere approssimata come segue:

$$y^2 \cong \frac{M}{2(N-1)} \quad . \quad (4.26)$$

Nel caso generale, per codici ortogonali si ha:

$$s^{(k)}(t - \Delta t_k) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} a^{(k)} \left[ \text{int} \left( \frac{q - \Delta m_k}{M} \right) \right] c^{(k)} [q - \Delta m_k] \text{rect}_{T_c} [t - (q - \Delta m_k)T_c - \Delta \theta_k]$$

quindi

$$\langle s^{(k)}(t - \Delta t_k), g_n^{(i)}(t) \rangle = \sum_{q=nM}^{nM+M-1} a^{(k)} \left[ \text{int} \left( \frac{q - \Delta m_k}{M} \right) \right] c^{(k)} [q - \Delta m_k] c^{(i)} [q]$$

$$\langle \text{rect}_{T_c} [t - (q - \Delta m_k)T_c - \Delta \theta_k], \text{rect}_{T_c} [t - qT_c] \rangle$$

## *Caratterizzazione del rumore nei circuiti*

### 1. RUMORE TERMICO

Con il termine di rumore si indicano le fluttuazioni spontanee della corrente che attraversa un bipolo, o quelle della caduta di potenziale ai suoi capi, e, più in generale, del campo elettromagnetico. A seconda della loro natura e delle proprietà statistiche associate, i rumori presenti nei sistemi di telecomunicazioni possono essere classificati in rumori termici, rumori impulsivi (*shot noise*) e rumori *flicker*.

Il rumore termico che si osserva in un qualsiasi conduttore o semiconduttore è prodotto dal moto casuale dei portatori associato all'agitazione termica. Pertanto, ai capi di un dispositivo caratterizzato da una resistenza  $R$  che si trovi alla temperatura  $T$  è presente una tensione a vuoto  $n(t)$  che varia rapidamente nel tempo in modo aleatorio. Stante l'elevato numero di contributi infinitesimi che concorrono alla generazione di tale tensione,  $N(t)$  è ben modellabile come un processo gaussiano stazionario, ergodico, a valor atteso nullo e spettro di densità di potenza

$$P_n(f) = 2R \frac{hf}{e^{hf/kT} - 1}, \quad (5.1)$$

in cui  $k$  è la costante di Boltzmann

$$k = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ [Joule/}^\circ\text{K]}$$

e

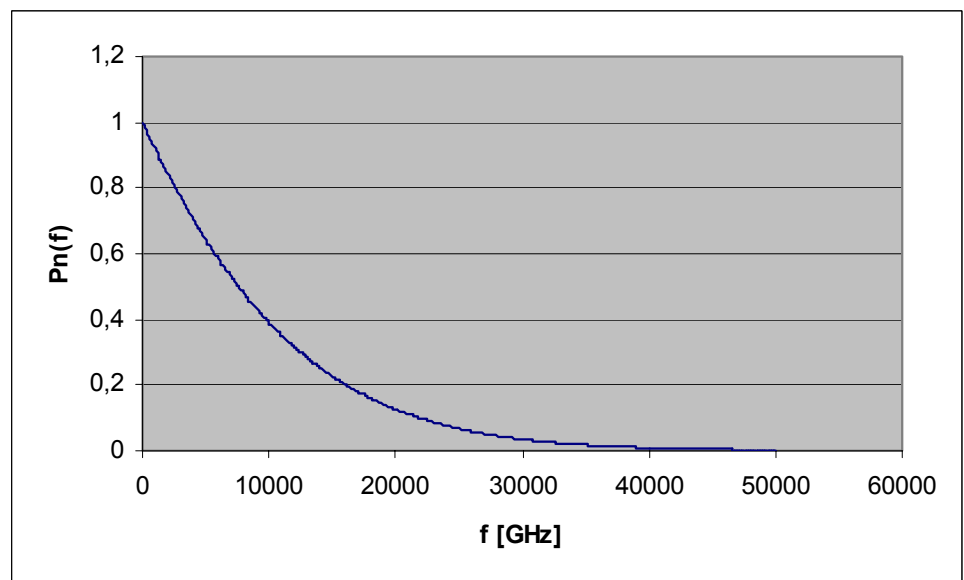
$$h=6.62 \cdot 10^{-34} \text{ [Joule} \cdot \text{s]}.$$

Come illustrato in Figura 1, in cui è riportato l'andamento dello spettro di densità di potenza per  $T=290^\circ\text{K}$ , In pratica risulta  $f \ll kT/h$  e per  $P_n(f)$  vale l'approssimazione

$$P_n(f) \cong 2R \cdot kT \quad (f \ll kT/h) \quad (5.2)$$

A tale spettro corrisponde il seguente spettro di densità di potenza disponibile:

$$W_{dn}(f) = \frac{P_n(f)}{4R} = \frac{1}{2} kT \quad (5.3)$$



**Figura 1 – Spettro di densità potenza del rumore termico di un bipolo passivo alla temperatura di 290°K.**

Alla temperatura di riferimento  $T_0=290^\circ\text{K}$  si ha

$$\begin{aligned} kT_0 &= -174 \text{ dBm/Hz} \\ &= -114 \text{ dBm/MHz.} \end{aligned}$$



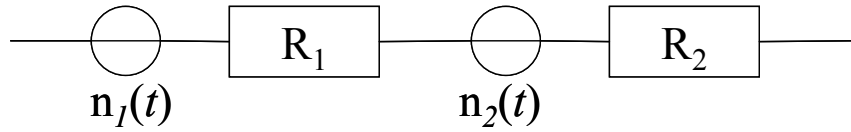


Figura 2 – Schema equivalente di una serie di bipoli passivi rumorosi.

Consideriamo due resistori in serie. Con riferimento allo schema di Figura 2 poiché i due processi  $N_1(t)$  e  $N_2(t)$  sono statisticamente indipendenti lo spettro di densità di potenza del rumore complessivo vale

$$\begin{aligned} P_{tot}(f) &= P_{n1}(f) + P_{n2}(f) \\ &= 2R_1 kT_1 + 2R_2 kT_2 = 2(R_1 + R_2)k \frac{R_1 T_1 + R_2 T_2}{R_1 + R_2} = 2(R_1 + R_2)kT_e \end{aligned} \quad (5.4)$$

in cui

$$T_e = \frac{R_1 T_1 + R_2 T_2}{R_1 + R_2} \quad (5.5)$$

è la temperatura equivalente di un unico bipolo passivo che genera un processo di rumore con le stesse caratteristiche di quello prodotto dalla serie dei due bipoli.

In generale il modello equivalente di un bipolo passivo realizzato connettendo tra di loro componenti resistivi e componenti reattivi, i cui componenti resistivi siano ad una stessa temperatura  $T$  è costituito da un'impedenza  $Z_b(f)$  in serie ad un generatore di tensione  $n_b(f)$ , essendo  $n_b(f)$  la realizzazione di un processo gaussiano stazionario, ergodico, a valor atteso nullo e spettro di densità di potenza

$$P_{nb}(f) = 2R_b(f) kT \quad (f \ll kT/h) \quad (5.6)$$

Se i componenti resistivi si trovano a temperature differenti lo spettro di densità di potenza vale

$$P_{nb}(f) = 2R_b(f) kT_e(f) \quad (f \ll kT/h) \quad (5.7)$$

essendo  $T_e(f)$  la temperatura equivalente del bipolo.

## 2. RUMORE TERMICO NELLE RETI 2 PORTE

Il comportamento di una rete 2 porte può esser modellato tramite il modello circuitale di Fig. 2 in cui  $n_{Qu}(t)$  rappresenta il rumore termico introdotto dalla rete.

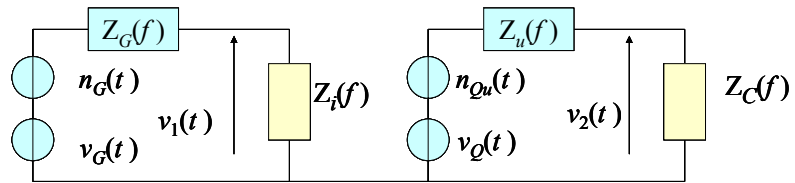


Figura 3 – Modello circuitale equivalente di una rete due porte

Equivalentemente, la rete può essere modellata tramite lo schema a blocchi di Figura 3 in cui sono indicate anche le espressioni degli spettri di densità di potenza dei processi di rumore introdotti dal generatore e dalla rete due porte.

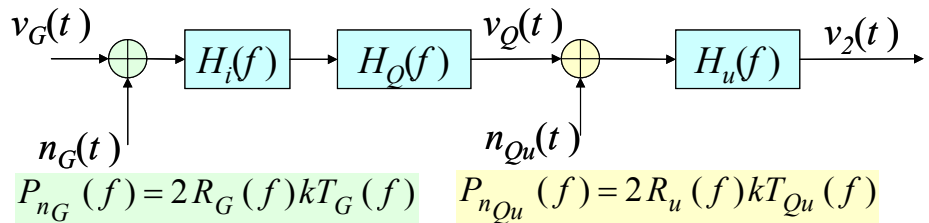


Figura 4 – Schema a blocchi equivalente di una rete due porte rumorosa.

Un generatore di rumore termico presente all'uscita di una rete 2-porte può essere trasportato all'uscita del circuito connesso a monte purché si divida la sua temperatura equivalente per  $G_d(f)$ .

Infatti con riferimento allo schema equivalente di Figura 4 in cui il processo di rumore introdotto dal generatore è riportato all'uscita della rete due porte, affinché il nuovo schema e quello di Figura 3 siano tra loro equivalenti è necessario modellare  $n_u(t)$  come un processo aleatorio gaussiano, stazionario ergodico, a valor medio nullo con spettro di densità di potenza pari a:

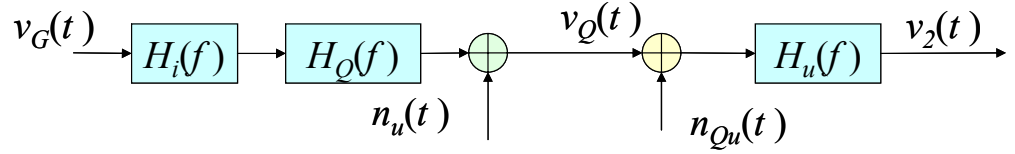


Figura 5 – Schema a blocchi equivalente di una rete due porte rumorosa.

$$\begin{aligned}
 P_{n_u}(f) &= \\
 &= 2R_G(f)kT_G(f)|H_i(f)|^2|H_Q(f)|^2 \\
 &= 2R_u(f)kG_d(f)T_G(f)
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Analogamente il generatore di rumore termico presente all'uscita del circuito connesso all'ingresso di una rete 2-porte può essere trasportato all'uscita della rete purché si multiplichi la sua temperatura equivalente per  $G_d(f)$ .

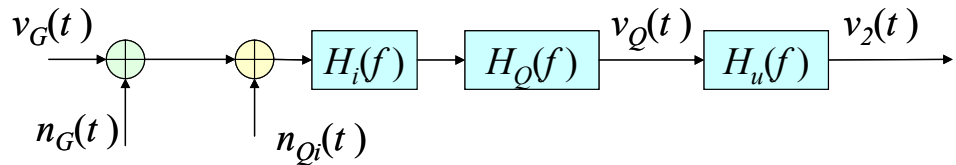


Figura 6 – Schema a blocchi equivalente di una rete due porte rumorosa.

Infatti, con riferimento allo schema di Figura 5, affinché il modello di Figura 3 e quello di Fig.5 siano tra loro equivalenti è necessario modellare  $n_{Q_i}(t)$  come un processo aleatorio gaussiano, stazionario ergodico, a valor medio nullo e con spettro di densità di potenza pari a:

$$\begin{aligned}
 P_{n_{Q_i}}(f) &= 2R_u(f)kT_{Q_u}(f) \frac{1}{|H_i(f)|^2|H_Q(f)|^2} \\
 &= 2R_G(f)k \frac{T_{Q_u}(f)}{G_d(f)}
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Il generatore più la rete 2-porte, visti dal lato della porta d'uscita, equivalgono ad un unico generatore. Pertanto il rumore complessivo è modellabile tramite un generatore posto in serie all'impedenza di uscita della rete, con spettro di densità di potenza

$$\begin{aligned} P_{nu}(f) &= 2R_u(f)kT_{Qu}(f) + 2R_u(f)kG_d(f)T_G(f) \\ &= 2R_u(f)kT_{eu}(f) \end{aligned} \quad (5.10)$$

essendo  $T_{eu}(f)$  la temperatura equivalente di rumore

$$T_{eu}(f) = T_{Qu}(f) + G_d(f)T_G(f) \quad (5.11)$$

Conseguentemente lo spettro di densità di potenza disponibile vale

$$W_{nu}(f) = \frac{1}{2}kT_{eu}(f) = \frac{1}{2}k[T_{Qu}(f) + G_d(f)T_G(f)]. \quad (5.12)$$

Indicando con  $T_{Qu}(f)$  la temperatura equivalente relativa al contributo di rumore introdotto dalla rete, in virtù dell'indipendenza statistica tra i due contributi si ha

$$2R_u(f)kT_{eu}(f) = 2R_u(f)kT_{Qu}(f) + 2R_u(f)kG_d(f)T_G(f) \quad (5.13)$$

ovvero,

$$T_{eu}(f) = T_{Qu}(f) + G_d(f)T_G(f). \quad (5.14)$$

Dalla precedente relazione segue anche che

$$T_{Qu}(f) = T_{eu}(f) - G_d(f)T_G(f). \quad (5.15)$$

---

#### **RETI PASSIVE**

---

Consideriamo ora una rete passiva ed esaminiamo il caso in cui i suoi componenti si trovino tutti alla stessa temperatura  $T_Q$ .

Se connettiamo in ingresso un generatore con temperatura equivalente  $T_Q$ , il tutto apparirà come un unico bipolo a temperatura  $T_Q$ . Pertanto, in base alla (5.15) si ha:

$$T_{Qu}(f) = [1 - G_d(f)] T_Q, \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} T_{Qi}(f) &= \left[ \frac{1}{G_d(f)} - 1 \right] T_Q \\ &= [A_d(f) - 1] T_Q \end{aligned} \quad (5.17)$$

essendo  $A_d(f)$  l'attenuazione disponibile della rete 2-porte.

---

#### RETI ATTIVE

---

Consideriamo ora una rete attiva connessa in ingresso ad un generatore rumoroso caratterizzato da un'impedenza d'ingresso  $R_g(f)$  e da una temperatura equivalente  $T_G$ , alla cui uscita sia connesso un carico con impedenza  $Z_c(f)$ . L'obiettivo è quello di riuscire a definire una procedura operativa che consenta di caratterizzare il comportamento della rete in relazione al rumore termico.

In particolare la figura di merito di maggior interesse è costituita dal rapporto tra la densità di potenza del segnale utile e quella del rumore all'uscita della rete.

Ricordando che la densità di potenza disponibile in uscita si ottiene moltiplicando la densità di potenza disponibile in ingresso per  $G_d(f)$ , in virtù della (5.12). si ha

$$SNR_u(f) = \frac{W_{dG}(f)G_d(f)}{\frac{1}{2}k[T_{Qu}(f) + G_d(f)T_G(f)]}. \quad (5.18)$$

Poiché il rumore presente all'uscita della rete è costituito da due contributi: il rumore prodotto dal generatore in ingresso, filtrato dalla rete due porte ed il rumore prodotto dalla rete stessa, è opportuno esprimere il rapporto segnale-rumore in uscita in funzione del rapporto segnale-rumore all'ingresso della rete.

$$\begin{aligned} \text{Conseguentemente si ha:} \quad \frac{SNR_g(f)}{SNR_u(f)} &= \frac{W_{dG}(f)}{\frac{1}{2}kT_G(f)} \frac{\frac{1}{2}k[T_{Qu}(f) + G_d(f)T_G(f)]}{W_{dG}(f)G_d(f)} = 1 + \frac{T_{Qu}(f)}{G_d(f)T_G(f)} \\ &= 1 + \frac{\frac{1}{2}kT_G(f)T_{Qu}(f)}{G_d(f)T_G(f)}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Tale relazione può essere convenientemente riscritta in funzione della temperatura equivalente in ingresso, ovvero:

$$\frac{SNR_g(f)}{SNR_u(f)} = 1 + \frac{T_{Qi}(f)}{T_G(f)}. \quad (5.20)$$

La precedente relazione indica che  $T_{Qi}(f)$  può essere valutato a partire da una misura del rapporto segnale rumore. Infatti

$$T_{Qi}(f) = T_G(f) \left[ \frac{SNR_g(f)}{SNR_u(f)} - 1 \right]. \quad (5.21)$$

---

**FATTORE DI  
RUMORE**

---

**Def.** A tale proposito, si definisce *Fattore di rumore* il peggioramento del rapporto segnale rumore introdotto dalla rete 2 porte quando il generatore in ingresso presenta una temperatura equivalente di rumore  $T_G(f) = T_0 = 290^\circ\text{K}$ .

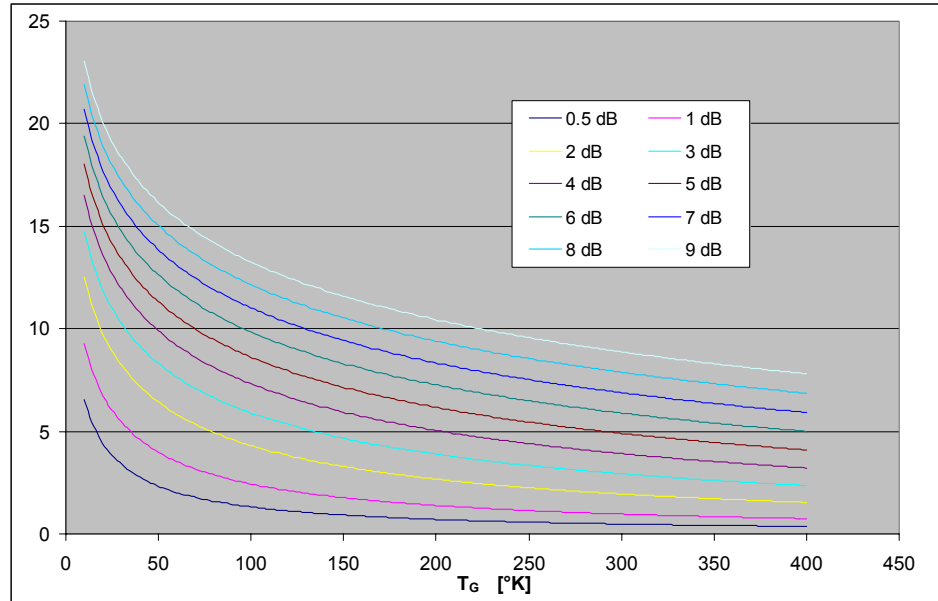
$$F(f) = \left[ \frac{SNR_g(f)}{SNR_u(f)} \right]_{T_G(f)=T_0}. \quad (5.22)$$

Pertanto, una volta misurato il fattore di rumore di una rete due porte,  $T_{Qi}(f)$  può essere calcolato come segue:

$$T_{Qi}(f) = T_0 [F(f) - 1]. \quad (5.23)$$

Analogamente, anche il peggioramento del rapporto segnale rumore quando in ingresso è connesso un generatore con temperatura equivalente  $T_G(f)$  può essere calcolato in base al fattore di rumore, poiché si ha

$$\frac{SNR_g(f)}{SNR_u(f)} = 1 + \frac{T_0}{T_G(f)} [F(f) - 1]. \quad (5.24)$$



**Figura 7 – Peggioramento del rapporto segnale rumore (in dB) in funzione della temperatura di rumore del generatore e del fattore di rumore  $F(f)$**

Si noti che nel caso particolare in cui  $T_G(f) = T_0$  la temperatura di rumore complessiva all'ingresso della rete vale

$$T_{ei}(f) = T_G(f) + T_{Qi}(f) = T_0 + [F(f) - 1] T_0 = F(f) T_0. \quad (5.25)$$

Si osservi inoltre che, per una rete passiva, in base alla (5.17) ed alla (5.23), si ha

$$F(f) = 1 + [A_d(f) - 1] \frac{T_0}{T_0} \quad (5.26)$$

#### CASCATA DI RETI 2- PORTE

Con riferimento allo schema di Figura 8, date  $N$  reti 2 porte connesse in cascata, si può costruire uno schema equivalente riportando in ingresso alla prima rete 2 porte le componenti di rumore termico, così come esemplificato in Figura 9,

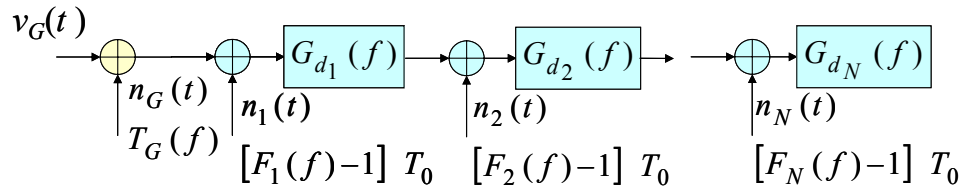


Figura 8 – Schema a blocchi di una cascata di reti 2-porte.

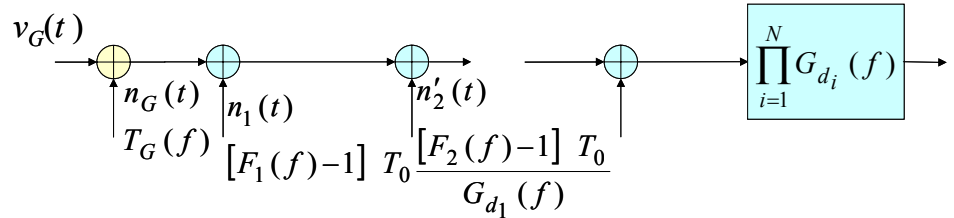


Figura 9 – Schema a blocchi di una cascata di reti 2-porte.

Pertanto la temperatura equivalente di tutto il sistema vale

$$T_{Q_i}(f) = T_o [F_1(f) - 1] + \frac{T_o [F_2(f) - 1]}{G_{d_1}(f)} + \dots + \frac{T_o [F_k(f) - 1]}{\prod_{i=1}^{k-1} G_{d_i}(f)} + \dots + \frac{T_o [F_N(f) - 1]}{\prod_{i=1}^{N-1} G_{d_i}(f)} \quad (5.27)$$

Il fattore di rumore complessivo vale

$$F^{Tot}(f) = 1 + \frac{T_{Q_i}(f)}{T_o} = F_1(f) + \frac{F_2(f) - 1}{G_{d_1}(f)} + \dots + \frac{F_k(f) - 1}{\prod_{i=1}^{k-1} G_{d_i}(f)} + \dots + \frac{F_N(f) - 1}{\prod_{i=1}^{N-1} G_{d_i}(f)} \quad (5.28)$$





## Canali affetti da fading

### 1. MODELLO WIDE SENSE STATIONARY UNCORRELATED SCATTERING (WWSSU)

Sia  $\underline{c}(\xi, t)$  l'involuppo complesso della funzione memoria  $w(\xi, t)$  rispetto a  $\xi$ .

- . Esso viene modellato con un processo aleatorio stazionario in senso lato (rispetto a  $t$ ).
- . Si assume inoltre che le attenuazioni relative a cammini con ritardo  $\xi_1$  siano incorrelate dalle attenuazioni relative ai cammini con ritardo  $\xi_2$

↳ Pertanto per il suo momento misto di ordine (1,1) si ottiene

$$E\{\underline{c}^*(\xi_1, t_1)\underline{c}(\xi_2, t_1 + \Delta t)\} = \varphi_c(\xi_1, \Delta t)u_0(\xi_1 - \xi_2)$$

Per  $\Delta t=0$  la funzione  $\varphi_c(\xi_1, 0)$  rappresenta semplicemente la distribuzione della potenza media del segnale all'uscita del canale di comunicazione in funzione del ritardo. Pertanto  $\varphi_c(\xi_1, 0)$  prende il nome di *profilo di intensità dei cammini multipli*.

L'intervallo  $T_m$  in cui  $\varphi_c(\xi_1, 0)$  è significativamente non nullo prende il nome di *dispersione temporale dei cammini multipli*.

**Errore. Non si possono creare oggetti dalla modifica di codici di campo.**

Si consideri la trasformata di Fourier rispetto al ritardo dell'involuppo complesso della funzione memoria

$$C(f, t) = F_{\xi} \{ \underline{c}(\xi, t) \}.$$

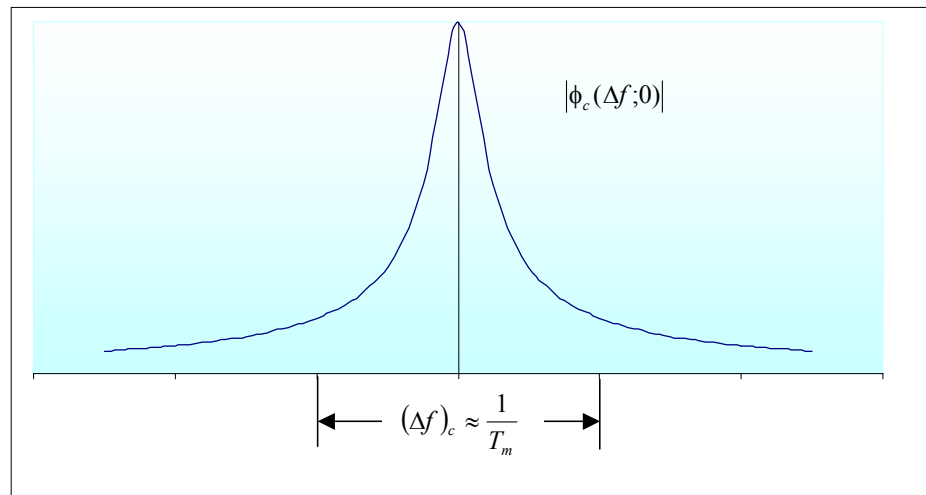
Si può dimostrare che il suo momento misto di ordine (1,1) vale:

$$E\{C^*(f_1, t_1)C(f_1 + \Delta f, t_1 + \Delta t)\} = \Phi_c(\Delta f, \Delta t)$$

essendo

$$\Phi_c(\Delta f, \Delta t) = F_{\xi} \{ \phi_c(\xi, \Delta t) \}$$

Per  $\Delta t=0$  la funzione  $\Phi_c(\Delta f, 0)$  misura la coerenza tra due toni sinusoidali le cui frequenze differiscono di  $\Delta f$ .



$(\Delta f)_c$  denota la banda di coerenza del canale.

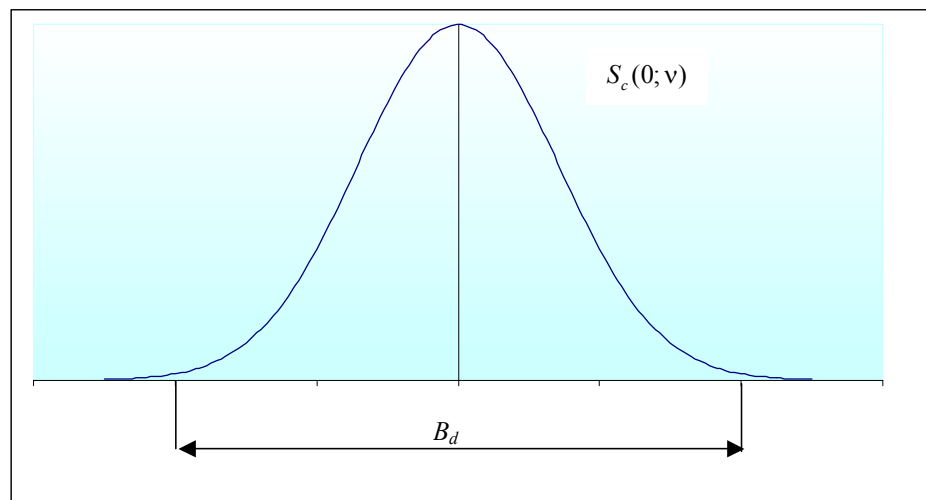
Se  $(\Delta f)_c$  è piccola rispetto alla banda del segnale trasmesso, il segnale subisce una forte distorsione lineare ed il canale è detto selettivo in frequenza.

Si consideri ora la variabilità del comportamento del canale descritta dall'andamento di  $\underline{c}(\xi, t)$  rispetto al tempo  $t$ . Tale variabilità induce, nel dominio della frequenza un'espansione Doppler dello spettro dell'involuppo complesso del segnale ricevuto (accompagnata ovviamente da una traslazione Doppler della frequenza della portante).

Per un'analisi quantitativa di questo effetto si può fare riferimento alla funzione  $S_c(\Delta f; \nu)$ , definita come la trasformata di Fourier di  $\Phi_c(\Delta f, \Delta t)$  rispetto a  $\Delta t$ :

$$S_c(\Delta f, \nu) = F_{\Delta t} \{ \Phi_c(\Delta f, \Delta t) \}$$

In particolare, la funzione  $S_c(0; \nu)$  fornisce lo spettro di densità di potenza che denota l'intensità del segnale in funzione della frequenza Doppler  $\nu$ . So osservi che se il canale non varia nel tempo, la funzione  $\Phi_c(\Delta f, \Delta t)$  è costante rispetto a  $\Delta t$ . Conseguentemente la funzione  $S_c(0; \nu)$  si riduce ad un impulso matematico centrato in  $\nu=0$  e non vi è espansione Doppler.



L'ampiezza  $B_d$  dell'intervallo per cui  $S_c(0; \nu)$  è significativamente diversa da zero prende il nome di *espansione Doppler del canale*.

Inoltre, l'ampiezza  $(\Delta t)_c$  dell'intervallo per cui  $\Phi_c(0, \Delta t)$  è significativamente diversa da zero prende il nome di intervallo di coerenza del canale.

Si osservi che

$$B_d \approx \frac{1}{(\Delta t)_c}.$$

### Effetti

1. In un sistema di trasmissione numerica se l'intervallo di ripetizione  $T_L$  dei simboli emessi dal trasmettitore (con  $T_L = 1/f_L$  essendo  $f_L$  il ritmo di emissione dei simboli) è tale che

$$T_L \gg T_m$$

l'interferenza intersimbolica introdotta dal canale è trascurabile

2. Inoltre se

$$T_L \ll (\Delta t)_c$$

essendo  $(\Delta t)_c = 1/B_d$  il tempo di coerenza del canale, la caratteristica del canale può essere misurata e compensata.

3. Affinché un canale possa essere considerato non selettivo in frequenza e lentamente variante nel tempo deve valere la condizione

$$\boxed{T_m B_d < 1}$$

Tav. I -Parametri caratterizzanti la funzione memoria di tipici canali varianti nel tempo

Banda		Durata del ritardo [s]	Dispersione doppler [Hz]	fattore di dispersione
3-30 MHz (HF)	propagazione ionosferica	$10^{-3} - 10^{-2}$	$10^{-1} - 1$	$10^{-4} - 10^{-2}$
30-300 MHz (VHF)	propagazione ionosferica in presenza di disturbi dovuta alla aurora boreale	$10^{-3} - 10^{-2}$	10 - 100	$10^{-2} - 1$
30-300 MHz (VHF)	diffusione ionosferica	$10^{-4}$	10	$10^{-3}$
3-30 GHz (SHF)	diffusione troposferica	$10^{-6}$	$10^{-3}$	$10^{-1}$
Luna		$10^{-2}$	10	$10^{-1}$

